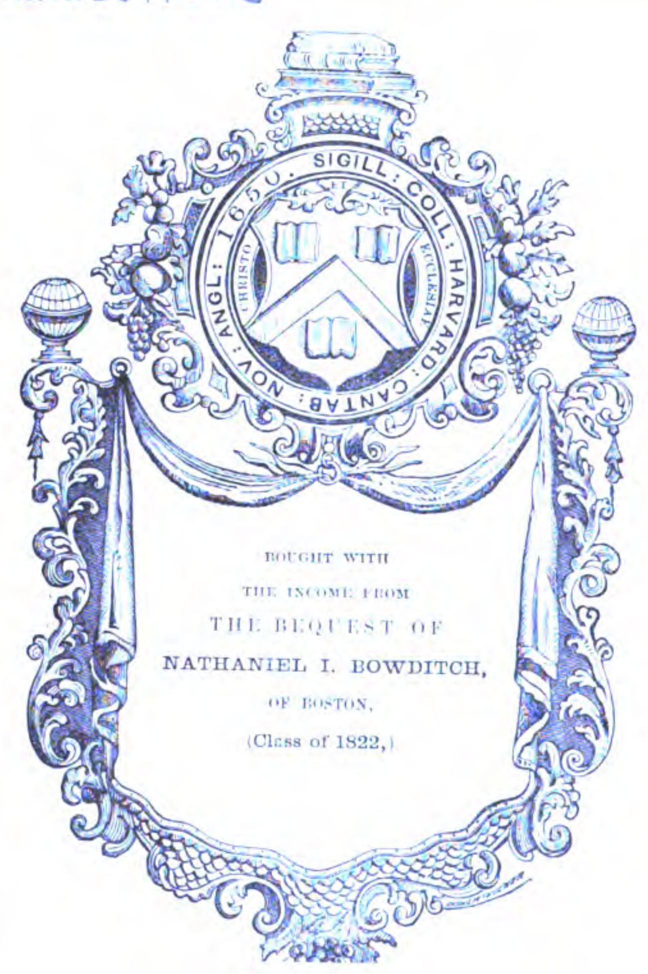
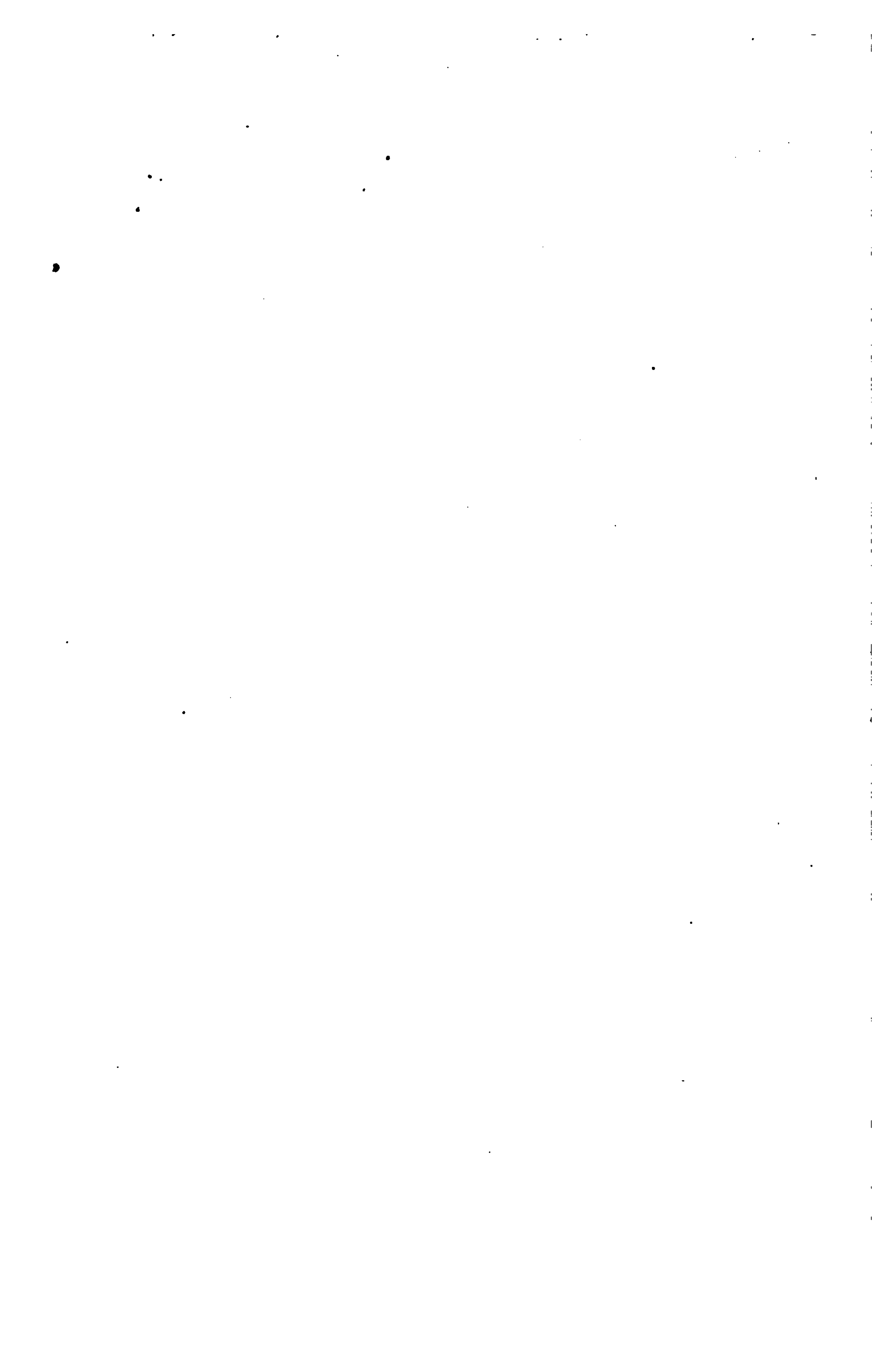

SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO
ET
ECCLESIAE



BEITRÄGE ZUR THEORIE DER LINEAREN TRANSFORMATIONEN

ALS EINLEITUNG IN DIE ALGEBRAISCHE INVARIANTENTHEORIE

VON

W. SCHEIBNER
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT LEIPZIG

LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1907

Vorwort.

Die Berichte der Mathematisch-physischen Klasse der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften vom 6. Juli und 7. Dezember 1903, sowie vom 29. Februar und 5. Dezember 1904, vom 1. Mai und 4. Dezember 1905, vom 26. Februar, 23. Juli und 29. Oktober 1906, endlich vom 17. Juni 1907 enthalten eine Reihe von Aufsätzen, welche großenteils bearbeitet worden sind auf Grund älterer Vorlesungsaufzeichnungen zu den Vorträgen des Verfassers über höhere Algebra, resp. die Theorie der ganzen Funktionen. Unter Hinzufügung einiger Ergänzungen dürfte es nicht unzweckmäßig erscheinen, diese *„Beiträge zur Theorie der linearen Transformationen, als Einleitung in die algebraische Invariantentheorie“* im Zusammenhange zu veröffentlichen, um jüngeren Mathematikern den Zugang zu einer in den letzten Dezennien zu immer größerer Tragweite erwachsenen Disziplin zu erleichtern.

Es sollen also die hauptsächlichsten Eigenschaften der linearen Substitutionen, nebst Anwendungen auf die Invariantentheorie der ganzen Funktionen, die Auflösung algebraischer Gleichungen und die Reduktion elliptischer Differentiale entwickelt werden. Der Verfasser ist dabei weniger von der Absicht ausgegangen, noch unbekannte Sätze oder neue Methoden abzuleiten, sondern wünscht vornehmlich durch die gegebene Darstellung das wissenschaftliche Interesse des Lesers für die betreffenden Gebiete zu wecken und ihm zu einem eingehenderen Studium den Weg zu bahnen. Immerhin glaubt er hoffen zu dürfen, daß trotz des vielfach elementaren Charakters die Arbeit nicht ohne Interesse auch für den erfahrenen Mathematiker sein werde. Der Beurteilung der Fachmänner muß es überlassen bleiben, ob die Vermeidung der symbolischen Methoden, sowie der homogenen Formen, zur Erleichterung des Verständnisses für den Anfänger beizutragen geeignet sein möchte.

Im Übrigen dürfte die Beherrschung des behandelten Stoffes auf Seiten des Studierenden ein gewisses Maß von Ausdauer und rechnerischer Gewandtheit in Anspruch nehmen. Den Anhang bilden einige Exkurse über Kreisverwandtschaft, über die sogenannte Tschirnhaus-Transformation, sowie über die Auflösung der Ikosaedergleichung und die lineare Transformation der elliptischen Funktionen. Wo es für die weitere Orientierung des Lesers dienlich sein konnte, sind eingehende historische Nachweisungen hinzugefügt worden.

Beiträge zur Theorie der linearen Transformationen, als Einleitung in die algebraische Invariantentheorie.

I. Die lineare Transformation ganzer Funktionen.

1.

Das der neueren Zeit angehörige Studium der invarianten Eigenschaften der Funktionen ist rasch von hervorragender Wichtigkeit für Analysis und Geometrie geworden. Gleichwohl sind verwandte Betrachtungen den Mathematikern längst geläufig gewesen. Man kann z. B. die Aufgabe der Integralrechnung als ein Problem der Invariantentheorie definieren, denn ein System Differentialgleichungen integrieren heißt nichts anderes, als diejenigen Funktionen aufsuchen, welche konstant, also invariant bleiben, während die Variabeln sich den Bedingungen der Aufgabe gemäß beliebig ändern dürfen.

Sollen z. B. gegebenenfalls die Differentialgleichungen erfüllt werden:

$$dx : dy : dz = x(y^2 - z^2) : y(z^2 - x^2) : z(x^2 - y^2) ,$$

so bleiben zwei voneinander unabhängige Funktionen

$$xyz \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 + z^2$$

invariant, welche Werte die Variabeln xyz auch sonst annehmen mögen. Wenn die Differentialrechnung sich mit den Gesetzen der Veränderlichkeit beschäftigt, so hat im Gegensatz hierzu die Integralrechnung zu untersuchen, was inmitten dieser Variabilität unveränderlich bleibt.

Analoge Probleme bieten sich auf elementarerem Gebiete in der Theorie der ganzen Funktionen, z. B. bei ihrer linearen Transformation: man kann fragen, was bei der dadurch bedingten Veränderung konstant bleibt. Geometrisch liefert die Transformation der Koordinaten invariante Ausdrücke für die orthogonale Substitution, wenn man bedenkt, daß die Werte

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{oder} \quad rr_1 \cos\varphi = xx_1 + yy_1 + zz_1$$

unabhängig sind von der Richtung des zu Grunde liegenden Koordinaten-

systems, ebenso wie die bekannten Formeln

$$4\varDelta^2 = (yz_1 - zy_1)^2 + (zx_1 - xz_1)^2 + (xy_1 - yx_1)^2,$$

und

$$6\Pi = \mathrm{S}x(y_1 z_2 - z_1 y_2) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Diese Ausdrücke bleiben demnach invariant, wenn man die Koordinaten $xyz\ldots$ durch lineare Ausdrücke von der Form

$$ax + by + cz, \quad a'x + b'y + c'z, \quad a''x + b''y + c''z, \ldots$$

ersetzt, wobei die neun Koeffizienten den bekannten Bedingungen der orthogonalen Substitution

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \quad aa' + bb' + cc' = 0 \text{ usw.}$$

unterworfen sind.

Als die ersten, welche in den Jahren 1841—45 auf die Wichtigkeit der einschlagenden Transformationssätze hingewiesen haben, sind neben den Engländern Boole und Cayley, die Deutschen Eisenstein und Hesse zu nennen.[1]) In Betreff des weiteren Ausbaues namentlich der algebraischen Invariantentheorie mögen hier nur die Namen Cayley, Hermite, Aronhold[2]), Sylvester, Clebsch, Gordan, Brioschi . . angeführt werden, um das Interesse zu bezeichnen, welches die hervorragendsten Mathematiker dem Gegenstande gewidmet haben. Auch an zusammenfassenden Lehrbüchern fehlt es nicht, wie von Clebsch, Salmon-Fiedler, Faà di Bruno-Noether, Gordan-Kerschensteiner u. a. In den letzten Dezennien aber hat die allgemeine Invariantentheorie auf den verschiedensten Gebieten Anwendung und ungeahnte Ausdehnung gefunden.

---

1) Boole, *Researches on the theory of analytical Transformations. Cambridge Mathem. Journal* Bd. II, 1841. — Boole, *Exposition of a general theory of linear transformations* (Bd. III u. IV, 1843). — Cayley, *On the theory of linear transformations* (ibid. Bd. IV, 1845). — Cayley, *Sur deux formules données par Mss. Eisenstein et Hesse* (*Crelle's Journal* Bd. 29, S. 54). — Eisenstein, *Allgemeine Auflösung der Gleichungen von den vier ersten Graden* (*Crelle* Bd. 27, S. 81, 1844). *Über eine merkwürdige identische Gleichung* (S. 105). *Über Ausdrücke, welche bei der Auflösung der kubischen Gleichungen erscheinen* (S. 319). — Hesse, *Über die Elimination der Variabeln aus drei algebraischen Gleichungen* (*Crelle* Bd. 28, S. 68, 1844).

2) Für die Invariantentheorie der ganzen homogenen Funktionen dürfen wir die Abhandlung von Aronhold, *Über eine fundamentale Begründung der Invariantentheorie* (*Crelle's Journal* Bd. 62, S. 281—345) als besonders wichtig bezeichnen, denn obgleich Aronhold's Untersuchungen 40—50 Jahre zurückliegen, so sind sie doch in ihren Folgerungen noch keineswegs erschöpft worden.

2.

Bevor wir uns zur elementaren Darstellung einiger Fundamentalsätze der Invariantentheorie wenden, wollen wir noch an einige Eigenschaften der linearen Transformationen erinnern, auf welche schon Möbius seine Theorie der kollinearen, der affinen und der Kreisverwandtschaft gegründet hat.

Bei der *kollinearen* Substitution

$$x = \frac{ax' + by' + c}{a_0 x' + b_0 y' + c_0}, \quad y = \frac{a'x' + b'y' + c'}{a_0 x' + b_0 y' + c_0}$$

entspricht jedem Punkte xy der Ebene ein zugeordneter oder *kollinear* verwandter $x'y'$. Aus den Elementen der projektiven Geometrie ist die Invarianz des Möbius'schen Doppelverhältnisses (*ratio bisectionalis*) zwischen je vier in einer Geraden liegenden Punkten bekannt, wie auch leicht auf dem Wege der analytischen Rechnung gefunden wird. Wir schreiben zu diesem Behufe

$$\begin{aligned} \xi x &= ax' + by' + c, & \xi_1 x_1 &= ax_1' + by_1' + c\,, \\ \xi y &= a'x' + b'y' + c', & &\text{usw.}, \\ \xi &= a_0 x' + b_0 y' + c_0\,, \end{aligned}$$

wo die Koeffizienten um einen beliebigen gemeinsamen Faktor unbestimmt bleiben. Setzt man ferner

$$\lambda = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a_0 & b_0 & c_0 \end{vmatrix}, \quad \begin{aligned} A &= b'c_0 - b_0 c', & B &= b_0 c - c_0 b\,, & C &= bc' - cb', \\ A' &= c'a_0 - c_0 a', & B' &= c_0 a - a_0 c\,, & C' &= ca' - ac', \\ A_0 &= a'b_0 - a_0 b', & B_0 &= a_0 b - b_0 a\,, & C_0 &= ab' - ba', \end{aligned}$$

dann wird

$$\begin{aligned} \xi' x' &= Ax + By + C\,, \\ \xi' y' &= A'x + B'y + C', \\ \xi' &= A_0 x + B_0 y + C_0\,, \end{aligned} \quad \lambda^2 = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A_0 & B_0 & C_0 \end{vmatrix}, \quad \begin{aligned} \lambda a &= B'C_0 - B_0 C', \\ \lambda a' &= C'A_0 - C_0 A', \\ \lambda b &= B_0 C - C_0 B\,, \end{aligned}$$

usw.

Wählt man nun in der beliebig gelegten x-Achse die Punkte o, x_1, x_2 und x, denen vermöge der kollinearen Substitution resp. die Punkte $x_0'y_0'$, $x_1'y_1'$, $x_2'y_2'$ und $x'y'$ entsprechen sollen, so liegen die letzteren nicht bloß sämtlich in der Geraden $a'x' + b'y' + c' = 0$, sondern ihr Doppelverhältnis

hat den Wert

$$\frac{x_1(x-x_2)}{x_2(x-x_1)} = \frac{\xi_1 x_1 (\xi_2 \cdot \xi x - \xi \cdot \xi_2 x_2)}{\xi_2 x_2 (\xi_1 \cdot \xi x - \xi \cdot \xi_1 x_1)}$$
$$= \frac{x_0' - x_1'}{x_0' - x_2'} \cdot \frac{x' - x_2'}{x' - x_1'},$$

wie sich nach Elimination der Koordinaten y' ohne Schwierigkeit ergibt. Wir können also sagen, daß die Funktion

$$X = \frac{x_0 - x_1}{x_0 - x_2} \cdot \frac{x - x_2}{x - x_1}$$

eine Invariante der betreffenden kollinearen Substitution bedeutet. Da nun die gewählten Punkte in einer beliebigen Geraden liegen können, so darf man allgemein das Doppelverhältnis

$$P = \frac{p_0 - p_1}{p_0 - p_2} \cdot \frac{p - p_2}{p - p_1}$$

für je vier einer Geraden angehörige Punkte $p_0\ p_1\ p_2$ und p als kollinear invariant ansehen. Außerdem ist bekannt, daß eine beliebige Vertauschung der vier Punkte untereinander nur zu den sechs Werten

$$P, \quad \frac{1}{P}, \quad 1 - P, \quad \frac{1}{1-P}, \quad \frac{P}{P-1} \quad \text{und} \quad \frac{P-1}{P}$$

führt, welche gleichzeitig invariant sind.

Ferner betrachten wir die lineare Substitution der *affinen* Verwandtschaft:

$$x = ax' + by' + c, \quad y = a'x' + b'y' + c',$$

welche als ein spezieller Fall der kollinearen Substitution für $\xi = 1$ erscheint, und von der schon Möbius gezeigt hat, daß *neben* dem Doppelverhältnis von je vier Punkten in einer Geraden auch die entsprechenden Flächenteile oder Figuren ihrem Inhalte nach invariant bleiben. Wenigstens ergibt sich dies, wenn die Determinante $ab' - ba' = \pm 1$ ist, weil die Gleichung

$$xy_1 - yx_1 = (ab' - ba')(x'y_1' - y'x_1')$$

gilt, sobald man den Koordinatenursprung nach dem Nullpunkte verlegt, und weil der Inhalt jedes Flächenteils in Dreiecke von der Form $\frac{1}{2}(xy_1 - yx_1)$ zerfällt gedacht werden kann. Hat $ab' - ba'$ einen von der Einheit verschiedenen Wert, so folgt statt der Gleichheit nur die Proportionalität der entsprechenden Figuren: den Fall $ab' - ba' = 0$ dürfen wir dabei ausschließen, weil alsdann $\frac{y - c'}{x - c} = const.$ sein würde, also die Punkte xy nur in einer bestimmten Geraden liegen könnten, während im Übrigen die Punkte $x'y'$ ins Unendliche rücken.

3.

Von besonderem Interesse ist noch die Untersuchung der *allgemeinen* linearen Substitution von der Form

$$apq + bp + cq + d = 0 \quad \text{oder} \quad p = -\frac{cq+d}{aq+b}, \quad q = -\frac{bp+d}{ap+c},$$

wenn die vorkommenden Größen beliebige komplexe Werte annehmen dürfen. Es ist leicht zu sehen, daß für

$$p = x + yi, \quad q = x' + y'i, \quad a = \alpha + \alpha' i, \quad b = \beta + \beta' i, \quad \text{usw.}$$

durch Zerfällung in den reellen und den imaginären Teil die Gleichungen hervorgehen:

$$\begin{aligned}
\xi x - \eta y &= -\gamma x' + \gamma' y' - \delta, & \xi &= \alpha x' - \alpha' y' + \beta, \\
\xi y + \eta x &= -\gamma' x' - \gamma y' - \delta', & \eta &= \alpha' x' + \alpha y' + \beta', \\
\xi' x' - \eta' y' &= -\beta x + \beta' y - \delta, & \xi' &= \alpha x - \alpha' y + \gamma, \\
\xi' y' + \eta' x' &= -\beta' x - \beta y - \delta', & \eta' &= \alpha' x + \alpha y + \gamma'.
\end{aligned}$$

Für $p = x + yi$ bezeichne p den Punkt xy. Sollen nun die beliebigen komplexen Punkte $p = p_0, p_1, p_2$ in die beliebigen Punkte $q = q_0, q_1, q_2$ durch die lineare Substitution übergeführt werden, so hat man

$$p = \frac{\mathrm{S}\, p_1 p_2 (q_2 - q_1)(q - q_0)}{\mathrm{S}\, p_0 (q_1 - q_2)(q - q_0)} \quad \text{oder} \quad q = \frac{\mathrm{S}\, q_1 q_2 (p_2 - p_1)(p - p_0)}{\mathrm{S}\, q_0 (p_1 - p_2)(p - p_0)}$$

zu setzen, wobei

$$\mathrm{S}\, q_0 (p_1 - p_2)(p - p_0) \times \mathrm{S}\, p_0 (q_1 - q_2)(q - q_0) = \prod (p_1 - p_2)(q_1 - q_2).$$

Die Summen und Produkte beziehen sich auf die zyklische Vertauschung der Indizes 0 1 2. Man verifiziert auch leicht die Formeln

$$p - p_0 = \frac{(p_0 - p_1)(p_0 - p_2)(q_2 - q_1)(q - q_0)}{\mathrm{S}\, p_0 (q_1 - q_2)(q - q_0)},$$

oder

$$q - q_0 = \frac{(q_0 - q_1)(q_0 - q_2)(p_2 - p_1)(p - p_0)}{\mathrm{S}\, q_0 (p_1 - p_2)(p - p_0)},$$

und durch Vertauschung der Indizes:

$$p - p_1 = \frac{(p_0 - p_1)(p_1 - p_2)(q_0 - q_2)(q - q_1)}{\mathrm{S}\, p_0 (q_1 - q_2)(q - q_0)},$$

und

$$p - p_2 = \frac{(p_0 - p_2)(p_1 - p_2)(q_0 - q_1)(q - q_2)}{\mathrm{S}\, p_0 (q_1 - q_2)(q - q_0)}.$$

Durch Division erhält man sofort:

$$\frac{p_0-p_1}{p_0-p_2}\cdot\frac{p-p_2}{p-p_1}=\frac{q_0-q_1}{q_0-q_2}\cdot\frac{q-q_2}{q-q_1},$$

oder die Gleichheit der Doppelverhältnisse

$$(p_1-p_2)(p-p_0):(p_2-p_0)(p-p_1):(p_0-p_1)(p-p_2)=$$
$$=(q_1-q_2)(q-q_0):(q_2-q_0)(q-q_1):(q_0-q_1)(q-q_2).$$

Die Funktion

$$P=\frac{p_0-p_1}{p_0-p_2}\cdot\frac{p-p_2}{p-p_1}$$

ist folglich eine *Invariante* der allgemeinen linearen Substitution, und man darf jetzt die Invarianz der *komplexen* Doppelverhältnisse zwischen *vier beliebigen Punkten der Ebene* in Anspruch nehmen.

Die geometrische Bedeutung des Satzes in Bezug auf das zugehörige Viereck $p p_0 p_1 p_2$ springt in die Augen: schreibt man

$$\frac{p-p_1}{p-p_2}=re^{\varphi i},\qquad \frac{p_0-p_1}{p_0-p_2}=r_0e^{\varphi_0 i},$$

so ist φ der der Seite $\overline{p_1 p_2}$ gegenüberstehende Winkel im Dreieck $p p_1 p_2$ und φ_0 der betreffende Winkel im Dreieck $p_0 p_1 p_2$, während

$$r=\frac{\overline{pp_1}}{\overline{pp_2}},\qquad r_0=\frac{\overline{p_0 p_1}}{\overline{p_0 p_2}},$$

mithin wird

$$P=\frac{r_0}{r}\,e^{(\varphi_0-\varphi)i}.$$

Daraus folgt, daß der Wert von P reell ist, sobald die vier Punkte auf einem Kreise liegen, weil im Kreisviereck $\varphi=\varphi_0$ wird. Diese Eigenschaft bleibt mithin den transformierten Vierecken erhalten und begründet die von Möbius eingeführte Kreisverwandtschaft. Dabei gelten gerade Linien als Kreise mit unendlichem Halbmesser. Übrigens heißt eine durch eine Gleichung von der Form $F(p,q)=0$ vermittelte Verwandtschaft konform, weil verwandte Figuren in den kleinsten Teilen ähnlich sind, so daß die entsprechenden Richtungen gleiche Winkel bilden. Denn aus

$$\frac{\partial F}{\partial p}dp+\frac{\partial F}{\partial q}dq=0\quad\text{folgt}\quad\frac{dq}{dp}=-\frac{\partial F}{\partial p}:\frac{\partial F}{\partial q},$$

wo die rechte Seite nur von den Koordinaten der Punkte p und q abhängt. Beim Fortschreiten zu den Nachbarpunkten $p+dp$ und $p+\delta p$

wird mithin $\frac{dp}{dq} = \frac{\delta p}{\delta q}$, oder wenn man zu den Moduln übergeht:

$$\left|\frac{dp}{\delta p}\right| = \left|\frac{dq}{\delta q}\right|,$$

womit die Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen erwiesen ist.

Daß die Kreisverwandtschaft aus der linearen Substitution entspringt, ergibt sich leicht auch auf folgendem direkten Wege. Wenn p und s beliebige komplexe Werte bedeuten, so ist

$$r = \mathrm{mod}\,(p-s) = |p-s|$$

für variable p die Gleichung eines Kreises vom Halbmesser r und dem Mittelpunkte s.[1]) Sei nun

$$p - s = \frac{\alpha q + \beta}{\gamma q + \delta}$$

eine beliebige lineare Substitution, so zeigt eine leichte Rechnung durch Identifizierung der Werte

$$(\alpha q + \beta)\,(\alpha' q' + \beta') = (\gamma q + \delta)\,(\gamma' q' + \delta')\,r^2$$

und

$$(q - \sigma)\,(q' - \sigma') = \varrho^2,$$

daß

$$r\,|\gamma q + \delta| = |\alpha q + \beta|$$

die Gleichung eines Kreises $\varrho = |q - \sigma|$ wird, dessen Halbmesser

$$\varrho = r\left|\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma\gamma' r^2 - \alpha\alpha'}\right| \quad \text{und Mittelpunkt} \quad \sigma = \frac{\alpha'\beta - \gamma'\delta r^2}{\gamma\gamma' r^2 - \alpha\alpha'},$$

wo die akzentuierten Größen die konjugierten Werte bezeichnen.

---

1) Für eine *Ellipse* mit den Brennpunkten f und f_1 und der großen Achse A wird analog

$$|p - f| + |p - f_1| = A,$$

während die Formel $|f - f_1| = Ae$ die Exzentrizität liefert. Sei ferner f der Brennpunkt, s der Scheitel und p ein Punkt einer *Parabel* mit dem Parameter $\varpi = 2|f - s|$, so erhält man

$$|p - s|^2 + 4|f - s|^2 = [|p - f| + |f - s|]^2.$$

Für $p = x + yi$, $s = 0$ und $f = \frac{1}{2}\varpi$ geht die auf die Achse bezogene Scheitelgleichung der Parabel $y^2 = 2\varpi x$ hervor. Die *Hyperbel* endlich unterscheidet sich von der Ellipse nur durch das Vorzeichen von $|p - f|$, wenn f und p dem nämlichen Hyperbelzweige angehören.

Soll der Kreis $r = |p - s|$ durch die Punkte $p_0 p_1 p_2$ gehen, so hat man

$$r = \left| \frac{(p_1 - p_2)(p_2 - p_0)(p_0 - p_1)}{S(p_1 - p_2) p_0'} \right|, \quad s = \frac{S(p_1 - p_2) p_0 p_0'}{S(p_1 - p_2) p_0'},$$

mithin auch

$$\varrho = \left| \frac{(q_1 - q_2)(q_2 - q_0)(q_0 - q_1)}{S(q_1 - q_2) q_0'} \right|, \quad \sigma = \frac{S(q_1 - q_2) q_0 q_0'}{S(q_1 - q_2) q_0'},$$

wenn für

$$p = x + yi, \quad q = x' + y'i,$$

$$p' = x - yi, \quad q' = x' - y'i$$

gesetzt wird. Übrigens finden sich im nachfolgenden **Anhang** weitere Betrachtungen über Kreisverwandtschaft, insbesondere über die sogenannte Transformation durch reziproke Radien.

4.

Nach vorstehendem Exkurse gehen wir über zur Ableitung der bei der linearen Transformation der ganzen Funktionen auftretenden Invarianten.

Seien f und g ganze Funktionen m-ten resp. n-ten Grades von der Form

$$f(\overset{m}{x}) = a_0 x^m + \widehat{m}_1 a_1 x^{m-1} + \widehat{m}_2 a_2 x^{m-2} \cdots + a_m = a_0 \prod_{i=1}^{m} (x - x_i)$$

$$g(\overset{n}{x}) = b_0 x^n + \widehat{n}_1 b_1 x^{n-1} + \widehat{n}_2 b_2 x^{n-2} \cdots + b_n = b_0 \prod_{k=1}^{n} (x - y_k)$$

mit den Koeffizienten a und b und den Wurzeln x_i und y_k, während

$$\widehat{m}_i = \frac{m \cdot m-1 \ldots m-i+1}{1 \cdot 2 \ldots i}$$

den i-ten Binomialkoeffizienten von m bezeichnen soll. Führt man hier die lineare Substitution ein:

$$x = \frac{\delta \xi + \delta_1}{\delta_2 \xi + \delta_3}, \quad \text{folglich} \quad \xi = \frac{\delta_3 x - \delta_1}{\delta - \delta_2 x}, \quad \frac{dx}{\delta - \delta_2 x} = \frac{d\xi}{\delta_2 \xi + \delta_3},$$

mit der Substitutionsdeterminante

$$\varepsilon = \delta \delta_3 - \delta_1 \delta_2 = (\delta_2 \xi + \delta_3) \cdot (\delta - \delta_2 x) = \varrho \cdot \sigma,$$

so gilt natürlich auch hier der Satz von der Invarianz des Doppelverhältnisses

$$\frac{x - x'}{x - x''} \cdot \frac{x_0 - x''}{x_0 - x'} = \frac{\xi - \xi'}{\xi - \xi''} \cdot \frac{\xi_0 - \xi''}{\xi_0 - \xi'},$$

wie sich am direktesten aus den Gleichungen

$$\varrho\varrho'(x-x') = \varepsilon(\xi-\xi'), \qquad \varrho_0\varrho''(x_0-x'') = \varepsilon(\xi_0-\xi''),$$
$$\varrho\varrho''(x-x'') = \varepsilon(\xi-\xi''), \qquad \varrho_0\varrho'(x_0-x') = \varepsilon(\xi_0-\xi')$$

ergibt. Man kann dafür auch schreiben

$$\varrho'(x'-x'') = \sigma''(\xi'-\xi'') \quad \text{oder} \quad \varrho''(x'-x'') = \sigma'(\xi'-\xi''),$$

wo die Bezeichnung leicht verständlich sein wird.

Weiter folgt wegen $\varrho = \delta_2\xi + \delta_3$:

$$\varrho^m \overset{m}{f}(x) = \overset{m}{\varphi}(\xi), \qquad \varrho^n \overset{n}{g}(x) = \overset{n}{\chi}(\xi), \qquad dx = \varepsilon\frac{d\xi}{\varrho^2},$$

und analog für $\sigma = \delta - \delta_2 x$:

$$\sigma^m \varphi\xi = \varepsilon^m fx, \qquad \sigma^n \chi\xi = \varepsilon^n gx \quad \text{nebst} \quad d\xi = \varepsilon\frac{dx}{\sigma^2}\,.$$

Hier bedeuten

$$\varphi\xi = \alpha_0\xi^m + \widehat{m}_1\alpha_1\xi^{m-1}\ldots \quad \text{und} \quad \chi\xi = \beta_0\xi^n + \widehat{n}_1\beta_1\xi^{n-1}\ldots$$

ganze Funktionen von ξ mit den Koeffizienten α und β.

Sind die Koeffizienten a_i der Einheit gleich, so wird

$$fx = (x+1)^m, \quad \text{folglich} \quad \alpha_i = (\delta+\delta_2)^{m-i}(\delta_1+\delta_3)^i,$$

auch kann man bemerken, daß gleichzeitig

$$x = 0, \quad \xi = -\frac{\delta_1}{\delta}, \quad \varrho = \frac{\varepsilon}{\delta}, \quad \sigma = \delta\,;$$
$$\xi = 0, \quad x = \frac{\delta_1}{\delta_3}, \quad \varrho = \delta_3, \quad \sigma = \frac{\varepsilon}{\delta_3}\,;$$
$$x = \infty, \quad \xi = -\frac{\delta_3}{\delta_2}, \quad \varrho = 0, \quad \sigma = \infty, \quad \varrho x = -\frac{\varepsilon}{\delta_2}, \quad \frac{\sigma}{x} = -\delta_2\,;$$
$$\xi = \infty, \quad x = \frac{\delta}{\delta_2}, \quad \varrho = \infty, \quad \sigma = 0, \quad \sigma\xi = \frac{\varepsilon}{\delta_2}, \quad \frac{\varrho}{x} = \delta_2\,.$$

Da ferner ε nicht verschwindet — denn in diesem Falle würde x aufhören variabel zu sein — und die Koeffizienten δ mit einem beliebigen Faktor multipliziert werden können, so darf man ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\varepsilon = \pm 1$ annehmen, und könnte den Fall $\varepsilon = -1$ als schief (*gauche*) bezeichnen, doch wollen wir vorläufig ε willkürlich lassen.

Bei der Differentiation der aufgestellten Gleichungen soll der i-te Differentialquotient

$$f^{(i)} = m\cdot m-1\ldots m-i+1\cdot f_{(i)}, \qquad g^{(i)} = n\cdot n-1\ldots n-i+1\cdot g_{(i)},$$

usw. geschrieben werden, wodurch

$$\frac{1}{i!} f^{(i)} = \widehat{m}_i f_{(i)}, \quad f'_{(i)} = (m-i) f_{(i+1)}, \quad f_{(i)}(x) = f\binom{m-i}{x},$$

mithin

$$f_{(i)}(0) = a_{m-i}, \quad \varphi_{(i)}(0) = \alpha_{m-i}.$$

α_{m-i} geht aus α_i durch Vertauschung von δ mit δ_1 und δ_2 mit δ_3, folglich auch von ε mit $-\varepsilon$ hervor, wie sich sogleich ergibt, wenn man $\frac{1}{\xi}$ statt ξ setzt. Für $f = (x+1)^m$ wird $f_{(i)} = (x+1)^{m-i}$.

Zur Bestimmung von α_i kann man sich der folgenden Vorschrift bedienen. Man bilde das Produkt

$$(\delta + \delta_2)^{m-i} (\delta_1 + \delta_3)^i,$$

dessen einzelne Glieder die Form haben

$$D \delta^e \delta_1^{e_1} \delta_2^{e_2} \delta_3^{e_3}, \quad \text{wo} \quad e + e_2 = m - i, \quad e_1 + e_3 = i,$$

und wähle daraus diejenigen Terme, in denen $e_2 + e_3 = k$, mit der Summe $\varDelta_k$, dann wird

$$\alpha_i = \mathop{\mathrm{S}}_{k=0}^{m} a_k \varDelta_k.$$

So findet man

$$\alpha_0 = a_0 \delta^m + m a_1 \delta^{m-1} \delta_2 \cdots + m a_{m-1} \delta \delta_2^{m-1} + a_m \delta_2^m = \delta_2^m f\left(\frac{\delta}{\delta_2}\right),$$

$$\alpha_1 = a_0 \delta^{m-1} \delta_1 + a_1 \delta^{m-2} (m \delta_1 \delta_2 + \varepsilon) \cdots$$
$$+ a_{m-1} \delta_2^{m-2} (m \delta \delta_3 - \varepsilon) + a_m \delta_2^{m-1} \delta_3,$$

. . . .

$$\alpha_{m-1} = a_0 \delta \delta_1^{m-1} + a_1 \delta_1^{m-2} (m \delta \delta_3 - \varepsilon) \cdots$$
$$+ a_{m-1} \delta_1^{m-2} (m \delta_1 \delta_2 + \varepsilon) + a_m \delta_2 \delta_3^{m-1},$$

$$\alpha_m = a_0 \delta_1^m + m a_1 \delta_1^{m-1} \delta_3 \cdots + m a_{m-1} \delta_1 \delta_3^{m-1} + a_m \delta_3^m = \delta_3^m f\left(\frac{\delta_1}{\delta_3}\right).$$

Bedenkt man nun, daß die Gleichung $\varrho^m f(x, a) = f(\xi, \alpha)$ geschrieben werden kann:

$$\sigma^m f(\xi, \alpha) = \varepsilon^m f(x, a) = f(x, a\varepsilon^m),$$

während der Übergang von x und ϱ zu ξ und σ einer Vertauschung von $\delta, \delta_1, \delta_2, \delta_3$ mit $\delta_3, -\delta_1, -\delta_2, \delta$ entspricht, so folgt aus

$$\alpha = F(a\, \delta\, \delta_1\, \delta_2\, \delta_3) \quad \text{die Gleichung} \quad a\varepsilon^m = F(\alpha, \delta_3, -\delta_1, -\delta_2, \delta).$$

Man kann folglich setzen

$$\varepsilon^m a_0 = (-1)^m \delta_2^m f\left(-\frac{\delta_3}{\delta_2}, \alpha\right) = \alpha_0 \delta_3^m - m\alpha_1 \delta_3^{m-1}\delta_2 \pm \cdots$$

$$\varepsilon^m a_m = \delta^m f\left(-\frac{\delta_1}{\delta}, \alpha\right) = (-1)^m (\alpha_0 \delta_1^m - m\alpha_1 \delta_1^{m-1}\delta \pm \cdots)$$

usw.

Eine leichte Rechnung ergibt ferner die Werte

$$\varphi_{,} = \delta_2 \varrho^{m-1} f + \varepsilon \varrho^{m-2} f_{,} ,$$

$$\varphi_{,,} = \delta_2^2 \varrho^{m-2} f + 2\delta_2 \varepsilon \varrho^{m-3} f_{,} + \varepsilon^2 \varrho^{m-4} f_{,,} ,$$

und allgemein, so lange i nicht m resp. n übersteigt:

$$\varphi_{(i)} = \delta_2^i \varrho^{m-i} f + \widehat{i}_1 \varepsilon \delta_2^{i-1} \varrho^{m-i-1} f_{,} + \widehat{i}_2 \varepsilon^2 \delta_2^{i-2} \varrho^{m-i-2} f_{,,} \cdots + \varepsilon^i \varrho^{m-2i} f_{(i)} ,$$

$$\chi_{(i)} = \delta_2^i \varrho^{n-i} g + \widehat{i}_1 \varepsilon \delta_2^{i-1} \varrho^{n-i-1} g_{,} + \widehat{i}_2 \varepsilon^2 \delta_2^{i-2} \varrho^{n-i-2} g_{,,} \cdots + \varepsilon^i \varrho^{n-2i} g_{(i)} .$$

Man kann auch schreiben

$$\varphi = \varrho^m f , \qquad \varepsilon^m f = \sigma^m \varphi ,$$

$$\varphi_{,} = \varrho^{m-1}(\sigma f_{,} + \delta_2 f) , \qquad \varepsilon^m f_{,} = \sigma^{m-1}(\varrho \varphi_{,} - \delta_2 \varphi) ,$$

$$\varphi_{,,} = \varrho^{m-2}(\sigma^2 f_{,,} + 2\delta_2 \sigma f_{,} + \delta_2^2 f) , \qquad \varepsilon^m f_{,,} = \sigma^{m-2}(\varrho^2 \varphi_{,,} - 2\delta_2 \varrho \varphi_{,} + \delta_2^2 \varphi) ,$$

usw. Aus vorstehenden Formeln erhält man für $\xi = 0$:

$$\varphi_{(i)}(0) = \alpha_{m-i} =$$

$$= \delta_3^{m-2i}\left(\delta_2^i \delta_3^i f\left(\frac{\delta_1}{\delta_3}\right) + \widehat{i}_1 \varepsilon \delta_2^{i-1} \delta_3^{i-1} f_{,}\left(\frac{\delta_1}{\delta_3}\right) \cdots + \varepsilon^i f_{(i)}\left(\frac{\delta_1}{\delta_3}\right)\right) ,$$

und durch Vertauschung von δ und δ_1, δ_2 und δ_3:

$$\varphi_{m-i}(0) = \alpha_i =$$

$$= \delta_2^{m-2i}\left(\delta_2^i \delta_3^i f\left(\frac{\delta}{\delta_2}\right) - \widehat{i}_1 \varepsilon \delta_2^{i-1} \delta_3^{i-1} f_{,}\left(\frac{\delta}{\delta_2}\right) \cdots + (-1)^i \varepsilon^i f_{(i)}\left(\frac{\delta}{\delta_2}\right)\right) .$$

5.

So lange die Funktionen f und g oder deren Koeffizienten a und b voneinander völlig unabhängig sind, gilt das Gleiche von den transformierten Funktionen φ und χ. Im entgegengesetzten Falle aber kann man sich die Aufgabe stellen, die Koeffizienten b dergestalt als rationale Funktionen der a zu bestimmen, daß χ aus φ ebenso hervorgeht, wie g

aus f, mit anderen Worten, daß die Koeffizienten β in χ durch die nämlichen Funktionen der α in φ ausgedrückt werden. Um hierbei nicht auf selbstverständliche Fälle, wie $g = f^2$ u. dergl. beschränkt zu sein, wollen wir die Aufgabe für $\varepsilon = 1$ behandeln, oder bestimmter ausgedrückt, eine gewisse Potenz der Substitutionsdeterminante als Faktor zulassen; ferner sollen die Koeffizienten b als *homogene ganze* Funktionen der a bestimmt werden.

Ein einfaches Beispiel liefern die Funktionen

$$\overset{3}{f}(x) = a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3\,,$$

$$\overset{2}{g}(x) = (a_1^2 - a_0a_2)x^2 + (a_1a_2 - a_0a_3)x + a_2^2 - a_1a_3$$
$$= b_0x^2 + 2b_1x + b_2\,.$$

Denn man erhält durch eine leichte Rechnung:

$$\alpha_0 = a_0\delta^3 + 3a_1\delta^2\delta_2 + 3a_2\delta\delta_2^2 + a_3\delta_2^3\,,$$

$$\alpha_1 = a_0\delta^2\delta_1 + a_1\delta(3\delta_1\delta_2 + \varepsilon) + a_2\delta_2(3\delta\delta_3 - \varepsilon) + a_3\delta_2^2\delta_3\,,$$

$$\alpha_2 = a_0\delta\delta_1^2 + a_1\delta_1(3\delta\delta_3 - \varepsilon) + a_2\delta_3(3\delta_1\delta_2 + \varepsilon) + a_3\delta_2\delta_3^2\,,$$

$$\alpha_3 = a_0\delta_1^3 + 3a_1\delta_1^2\delta_3 + 3a_2\delta_1\delta_3^2 + a_3\delta_3^3\,,$$

$$\alpha_1^2 - \alpha_0\alpha_2 = \beta_0\,,\quad \alpha_1\alpha_2 - \alpha_0\alpha_3 = 2\beta_1\,,\quad \alpha_2^2 - \alpha_1\alpha_3 = \beta_2\,,$$

wenn

$$\varrho^3 fx = \alpha_0\xi^3 + 3\alpha_1\xi^2 + 3\alpha_2\xi + \alpha_3 = \varphi\xi\,,$$

und

$$\varepsilon^2\varrho^2 gx = (\alpha_1^2 - \alpha_0\alpha_2)\xi^2 + (\alpha_1\alpha_2 - \alpha_0\alpha_3)\xi + \alpha_2^2 - \alpha_1\alpha_3$$
$$= \beta_0\xi^2 + 2\beta_1\xi + \beta_2 = \chi\xi$$

gesetzt werden.

Wenn vermöge der Substitution

$$\varrho x = \delta\xi + \delta_1\,,\qquad \varrho = \delta_2\xi + \delta_3\,,\qquad \varepsilon = \delta\delta_3 - \delta_1\delta_2\,,$$

aus den Gleichungen

$$\varrho^m f(xa) = \varphi\xi = f(\xi\alpha),\quad \varepsilon^p\varrho^n g(xb) = \chi\xi = g(\xi\beta)\,,$$

durch Einführung der Koeffizienten a und α eine Gleichung hervorgeht von der Form

$$\varepsilon^p\varrho^n g(x, \overset{\mu}{a}) = \chi\xi = g(\xi, \overset{\mu}{\alpha}),$$

die Koeffizienten $\beta = F(\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_m) = \overset{\mu}{\alpha}$ also ebenso durch die α, wie die

$b = F(a_0 a_1 \ldots a_m) = \overset{\mu}{a}$ durch die a ausgedrückt werden, so nennt man g eine *Kovariante* der Funktion oder Form f. Sind die Funktionen F homogene Ausdrücke ihrer Argumente von der μ-ten Dimension, so heißt g eine Kovariante von der μ-ten Dimension, vom n-ten Grade und mit dem Gewichte p. Läßt man in der Gleichung $\varepsilon^p \varrho^n g(x b) = g(\xi \beta)$ die Variabeln x oder ξ verschwinden oder unendlich werden, so ergeben sich die Relationen

$$\varepsilon^{p+n} b_0 = \beta_0 \delta_3^n - \widehat{n}_1 \beta_1 \delta_3^{n-1} \delta_2 + \widehat{n}_2 \beta_2 \delta_3^{n-2} \delta_2^2 \mp \cdots,$$

$$\varepsilon^{p+n} b_n = (-1)^n (\beta_0 \delta_1^n - \widehat{n}_1 \beta_1 \delta_1^{n-1} \delta + \widehat{n}_2 \beta_2 \delta_1^{n-2} \delta^2 \mp \cdots),$$

$$\beta_0 = \varepsilon^p (b_0 \delta^n + \widehat{n}_1 b_1 \delta^{n-1} \delta_2 + \widehat{n}_2 b_2 \delta^{n-2} \delta_2^2 + \cdots),$$

$$\beta_n = \varepsilon^p (b_0 \delta_1^n + \widehat{n}_1 b_1 \delta_1^{n-1} \delta_3 + \widehat{n}_2 b_2 \delta_1^{n-2} \delta_3^2 + \cdots).$$

Durch Differentiation aber erhält man wegen Hinzutritts des Faktors ε^p

$$\chi_{,} = \delta_2 \varepsilon^p \varrho^{n-1} g + \varepsilon^{p+1} \varrho^{n-2} g_{,}.$$

Im vorstehenden Beispiel ist g eine Kovariante von der zweiten Dimension und dem zweiten Grade mit dem Gewichte $p = 2$. Für $f = g$ wird f seine eigene Kovariante m-ten Grades, von der ersten Dimension und dem Gewichte $p = 0$. Im Allgemeinen wird das Gewicht[1])

$$p = \frac{1}{2}(m\mu - n),$$

denn da die α von der Dimension m in Bezug auf die Koeffizienten δ sind und die β von der Dimension $2p + n$, so hat man $2p + n = m\mu$. Folglich wird in Bezug auf den Modul 2 $m\mu \equiv n$, und es muß bei jeder Kovariante oder Invariante für m ungerade der Grad $n \equiv \mu$ und für m gerade $n \equiv 0 \mod 2$ sein. Oder mit anderen Worten: eine Kovariante von f ist nur dann von ungeradem Grade, wenn m und μ gleichzeitig ungerade sind. Die Zahlen n, μ, p mögen die **Maßzahlen** der Kovariante heißen.

Es mag gleich hier bemerkt werden, daß die Gleichung

$$\varrho^n f(x a) = f(\xi \alpha) = \varphi \xi$$

nicht notwendig voraussetzt, daß die Funktion f ein in x^m multipliziertes

---

1) Von anderen Autoren wird p als der *Index* und statt dessen die Größe $\frac{1}{2}(m\mu + n)$ als das Gewicht der Kovariante bezeichnet, auch finden sich die Benennungen Grad und Dimension (oder Ordnung) vertauscht. Vgl. z. B. Salmon-Fiedler, *Algebra*, Art. 146, Faà di Bruno-Walter, *Binäre Formen*, S. 103. Die jetzt allgemein adoptierten Benennungen *Invariante*, *Kovariante* und *Diskriminante* rühren von Sylvester her.

Glied enthalte. Vielmehr kann im speziellen Falle der Koeffizient $a_0 = 0$ sein, ohne daß die Koeffizienten α oder b, d. h. die Kovariante gx, ihre Bedeutung verlieren. Ebenso kann eintretendenfalls b_0 verschwinden, so daß x^n in g nicht vorkommt; es sind dann gleichwohl f und g als Kovarianten von den Graden m und n zu betrachten, wobei $\varphi\xi$ resp. $\chi\xi$ den Faktor ϱ erhalten. Auch ist leicht einzusehen, daß der Kovariantenbegriff nicht auf den Fall beschränkt zu werden braucht, in welchem die Koeffizienten b *rational* durch die Koeffizienten a bestimmt werden: als Beispiel für eine *irrationale* Kovariante kann die oben entwickelte Gleichung

$$\varrho\varrho'(x-x') = \varepsilon(\xi-\xi') \quad \text{oder} \quad \varrho'\varrho''(x'-x'') = \varepsilon(\xi'-\xi'')$$

dienen, wo zwar ξ' linear von x', diese Wurzel aber algebraisch irrational von den Koeffizienten der Funktion fx abhängt.

Kovarianten nullten Grades heißen *Invarianten*, weil sie von der Variablen x unabhängig sind. Für $n = 0$ oder

$$gx = g0 = G = F(a_0 a_1 \ldots a_m),$$

wird neben $\varrho^m fx = \varphi\xi$ die Invariante G von der Dimension μ und dem Gewichte $p = \frac{1}{2} m\mu$ die Gleichung erfüllen:

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}m\mu} G = \chi\xi = \chi 0 = F(\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_m).$$

Ferner heißt analogerweise h eine simultane Kovariante der beiden Formen f und g, vom Grade l und dem Gewichte q, wenn für

$$\varrho^m f(x\,a) = \varphi\xi = f(\xi\,\alpha), \quad \varrho^n g(x\,b) = \chi\xi = g(\xi\,\beta), \quad \varepsilon^q \varrho^l h(x\,c) = \psi\xi = h(\xi\,\gamma),$$

die Koeffizienten c ebenso von den a und b, wie die γ von α und β abhängen. Sind die c homogene Ausdrücke von der Dimension μ in Bezug auf a, ν in Bezug auf b, so erhält man das Gewicht

$$q = \frac{1}{2}(m\mu + n\nu - l),$$

und für

$$h = h(x, \overset{\mu}{a}, \overset{\nu}{b}) \quad \text{wird} \quad \psi = h(\xi, \alpha, \beta) = \varepsilon^q \varrho^l h(x, a, b).$$

Eine simultane Invariante aber ergibt sich für

$$l = 0 \quad \text{oder} \quad q = \frac{1}{2}(m\mu + n\nu).$$

Selbstverständlich gehören die Kovarianten von f oder g allein auch zu den simultanen Kovarianten beider Funktionen, aber nicht umgekehrt. Vielmehr wird eine simultane Kovariante von f und g nur dann Ko-

variante von f allein, wenn g als Kovariante von f gegeben ist; hat g das Gewicht p, so wächst dadurch das Gewicht q um $p\nu$. Der einfachste Fall ist offenbar, wenn bei einer simultanen Kovariante von $f, g, \ldots$ die einzelnen Funktionen einander gleich gesetzt werden, also $a_i = b_i \ldots$

6.

Als Beispiel für eine simultane Invariante von f und g mit dem Gewichte $q = \frac{1}{2}(m\mu + n\nu)$ entwickeln wir die sogenannte *Resultante* der beiden Funktionen, deren Verschwinden der Elimination der Variablen x aus den Gleichungen $f = g = 0$ entspricht.

Wenn die Funktionen fx und gy eine gemeinschaftliche Wurzel haben, so wird $x_i = y_k$ und $\prod_{ik}(x_i - y_k) = 0$. Das Produkt $\prod_{ik}$ ist eine ganze symmetrische Funktion der Wurzeln von f und g, so daß nach den Prinzipien der Algebra

$$a_0^n b_0^m \prod_{ik} = F(a_0 a_1 \ldots a_m b_0 b_1 \ldots b_n)$$

durch eine ganze homogene Funktion der Koeffizienten a und b von den Dimensionen $\mu = n$ und $\nu = m$ ausgedrückt wird. Diese führt den Namen der Resultante

$$R(fg) = (-1)^{mn} R(gf)$$

und bleibt — eventuell abgesehen von einem zu bestimmenden Faktor — *invariant* bei einer linearen Transformation der Variablen x, weil, wenn $R' = R(\varphi\chi)$ den Wert der Resultante nach der Transformation darstellt, beide Gleichungen $R = 0$ und $R' = 0$ die Bedingung für ein gleichzeitiges Verschwinden von f und g enthalten.

Man findet sogleich durch direkte Rechnung für $y = \frac{\delta\eta + \delta_1}{\delta_2\eta + \delta_3}$:

$$\varepsilon(x_i - y_k) = (\delta - \delta_2 x_i)(\delta - \delta_2 y_k)(\xi_i - \eta_k),$$

folglich

$$\varepsilon^{mn} \prod_{ik}(x_i - y_k) = \prod_i (\delta - \delta_2 x_i)^n \prod_k (\delta - \delta_2 y_k)^m \prod_{ik}(\xi_i - \eta_k).$$

Nun hatten wir für $\xi = \infty$, $x = \frac{\delta}{\delta_2}$, $\sigma = 0$, $\sigma\xi = \frac{\varepsilon}{\delta_2}$, mithin gibt die Gleichung $\sigma^m \varphi\xi = \varepsilon^m fx$:

$$\left(\frac{\varepsilon}{\delta_2}\right)^m \alpha_0 = \varepsilon^m f\left(\frac{\delta}{\delta_2}\right) \quad \text{oder} \quad \alpha_0 = a_0 \prod_i (\delta - \delta_2 x_i) = a_0 \prod \sigma_i,$$

und analog

$$\beta_0 = b_0 \prod_k (\delta - \delta_2 y_k).$$

Die Substitution dieser Werte liefert

$$\varepsilon^{mn} a_0^n b_0^m \prod_{ik}(x_i - y_k) = \alpha_0^n \beta_0^m \prod_{ik}(\xi_i - \eta_k) ,$$

oder

$$\varepsilon^{mn} R(fg) = R(\varphi\chi) ,$$

d. h. die Resultante R ist eine Invariante vom Gewicht $q = mn$.

Bei dieser Ableitung ist vorausgesetzt, daß R *simultane* Invariante der beiden Funktionen f und g sei. Sind jedoch die Koeffizienten b in g durch die Koeffizienten a in f bestimmt, so wird die Eliminationsresultante allein von den a abhängig und kann nur als Invariante von f bestimmt werden.[1]) Dieser Fall tritt z. B. ein für

$$g = f_, = \frac{1}{m} f', \quad n = m - 1 ,$$

wobei $R(ff_,)$ durch a_0 teilbar und erst nach Abtrennung dieses Faktors eine Invariante von f wird. Wir schreiben jetzt

$$D(f) = \frac{1}{a_0} R(ff_,) = a_0^{2m-2} \prod_{ik}(x_i - y_k) = \frac{1}{m^m} a_0^{2m-2} \prod_{ik}'(x_i - x_k) ,$$

und nennen $D(f)$ die Diskriminante der Funktion f. Hier durchläuft in $\prod_{ik}$ i die Werte von 1 bis m, k von 1 bis $m - 1$, während in $\prod_{ik}'$ i und k zwei *verschiedene* Werte von 1 bis m bedeuten, wodurch gleichfalls $m(m-1)$ Faktoren entstehen. Da von diesen je zwei einander entgegengesetzt sind, so wird für $\frac{m \cdot \overline{m-1}}{2}$ verschiedene Werte*paare* $i > k$, wie durch $\prod^*$ bezeichnet werden soll:

$$D_m(f) = (-1)^{\frac{m \cdot \overline{m-1}}{2}} \frac{1}{m^m} a_0^{2m-2} \prod_{ik}^*(x_i - x_k)^2 .$$

Obgleich die Gleichungen $f' y_k = 0$ und $f x_k = 0$ im Allgemeinen verschiedene Wurzeln haben, so wird doch bekanntlich für $x_i = x_k$ auch $x_k = y_k$, so daß $\prod \prod'$ und $\prod^*$ gleichzeitig verschwinden. In der Tat erhält man wegen

$$f'(x_i) = a_0 \prod_k'(x_i - x_k) = m f_,(x_i) :$$

$$a_0^m \prod_{ik}'(x_i - x_k) = m^m \prod_i f_,(x_i) = m^m a_0^m \prod_{ik}^*(x_i - x_k) .$$

Auch überzeugt man sich leicht, daß die Diskriminante $D_m(f)$ eine *Invariante* vom Gewicht $p = m(m-1)$ und der Dimension $\mu = 2(m-1)$

1) Man vergleiche auch IV, Art. 51.

darstellt, wenn man wieder ausgeht von der Gleichung

$$\varepsilon(x_i - x_k) = \sigma_i\sigma_k(\xi_i - \xi_k)\,, \qquad \varepsilon^{m(m-1)}\prod\nolimits_{ik}'(x_i - x_k) = \prod\nolimits_{ik}'\sigma_i\sigma_k(\xi_i - \xi_k)\,.$$

Hier ist offenbar

$$\prod\nolimits_{ik}'\sigma_i\sigma_k = \prod\nolimits_i \sigma_i^{m-1}\prod\nolimits_k \sigma_k^{m-1} = (\prod \sigma_i)^{2m-2}\,,$$

folglich wegen

$$\alpha_0 = a_0\prod\nolimits_i \sigma_i\,, \qquad \varepsilon^{m(m-1)}D(f) = D(\varphi)\,,$$

q. e. d.

Es mögen hier noch beispielsweise die Werte der Diskriminanten für $m = 2, 3, 4$ angeführt werden. Man erhält bei Benutzung der Potenzsummen

$$s_k = \mathrm{S}_i x_i^k\,, \quad S_m = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{m-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{m-1} & s_m & \dots & s_{2m-2} \end{vmatrix} = \prod\nolimits_{ik}^*(x_i - x_k)^2$$

für $m = 2$:

$$D_2(f) = -\frac{1}{4}\,a_0^2\prod\nolimits_{ik}^*(x_i - x_k)^2 = \frac{1}{4}\,a_0^2(s_1^2 - 2s_2)\,,$$
$$= -\Delta = a_0a_2 - a_1a_1\,;$$

für $m = 3$:

$$D_3(f) = -\frac{1}{27}\,a_0^4\prod\nolimits_{ik}^*(x_i - x_k)^2\,,$$
$$= \frac{1}{162}\,a_0^4(s_1^6 - 9s_1^4s_2 + 21s_1^2s_2^2 - 3s_2^3 + 8s_1^3s_3 - 36s_1s_2s_3 + 18s_3^2)\,,$$
$$= J = (a_1a_2 - a_0a_3)^2 - 4(a_1a_1 - a_0a_2)(a_2a_2 - a_1a_3)\,,$$
$$= 4a_0a_2^3 - 3a_1^2a_2^2 + a_0^2a_3^2 - 6a_0a_1a_2a_3 + 4a_1^3a_3\,;$$

für $m = 4$:

$$D_4(f) = \frac{1}{256}\,a_0^6\prod\nolimits_{ik}^*(x_i - x_k)^2 = G^3 - 27H^2\,,$$

wo ihrerseits G und H die Invarianten zweiter und dritter Dimension bedeuten:

$$G = \frac{1}{48}\,a_0^2(s_1^4 - 8s_1^2s_2 + 7s_2^2 + 12s_1s_3 - 12s_4)\,,$$
$$= 3a_2a_2 - 4a_1a_3 + a_0a_4\,,$$

$$H = \frac{1}{48\cdot 72}\,a_0^3(s_1^6 - 12s_1^4s_2 + 39s_1^2s_2^2 - 34s_2^3 + 12s_1^3s_3 -$$
$$- 36s_1s_2s_3 - 24s_3^2 - 18s_1^2s_4 + 72s_2s_4)\,,$$

$$= a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 - a_2^3 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}\,.$$

Zwischen den Invarianten $\varDelta\, G\, H$ und J besteht die identische Relation:

$$\varDelta G + a_0 H + J = 0$$

7.

Als ganze Funktion der Koeffizienten von f läßt sich jede Kovariante oder Invariante g auch durch eine ganze symmetrische Funktion der Wurzeln x_i darstellen. Diese Funktionen können aber nur von den *Differenzen* $x - x_i$ und $x_j - x_k$ abhängen, weil die Substitution

$$x = \xi + \delta_1\,, \quad \varepsilon = 1\,, \quad \varrho = 1\,, \quad gx = g\xi$$

liefert, also eine Änderung von x um eine Konstante ohne Einfluß bleibt. Mithin darf man setzen

$$g(x\overset{\mu}{a}) = a_0^{\mu} \sum \left(\prod_i (x - x_i)^{k_i} \prod\nolimits_{jk}^{*} (x_j - x_k)^{l_{jk}} \right),$$

wenn $\sum$ eine symmetrische Summe und $\prod^{*}$ das Produkt der $\frac{m \cdot m - 1}{2}$ Wurzeldifferenzen bedeutet, so daß die Summe $\sum$ sich auf Produkte von $\frac{m \cdot m + 1}{2}$ Faktoren erstreckt.

Fragt man, auf welchen Grad in Bezug auf eine Wurzel x_i jeder Term der symmetrischen Summe steige, so hat man aus dem Produkt $\prod^{*}$ die $m - 1$ Faktoren auszuwählen, für welche j oder k gleich i wird. Sei nun $l_i = \underset{k \neq i}{\mathrm{S}} l_{ik}$ die Summe der entsprechenden Exponenten, so erhält man für den Exponenten von x_i den Wert $k_i + l_i$, und es läßt sich leicht zeigen, daß dieser *von i unabhängig* sein muß, wenn die Gleichung

$$\varepsilon^{p} \varrho^{n} g(x\overset{\mu}{a}) = g(\xi\overset{\mu}{\alpha}) = \alpha_0^{\mu} \sum \left(\prod_i (\xi - \xi_i)^{k_i} \prod\nolimits_{jk}^{*} (\xi_j - \xi_k)^{l_{jk}} \right)$$

bestehen soll. In der Tat ergibt die Substitution

$$\varrho \varrho_i (x - x_i) = \varepsilon (\xi - \xi_i) \qquad \text{und} \qquad \varrho_j \varrho_k (x_j - x_k) = \varepsilon (\xi_j - \xi_k)\,,$$

nebst

$$\alpha_0 = a_0 \prod \sigma_i \quad \text{oder} \quad \varepsilon^{m} a_0 = \alpha_0 \prod \varrho_i\,,$$

$$\varepsilon^{p} \varrho^{n} g(xa) = \varepsilon^{p - m\mu + \mathrm{S} k_i + \mathrm{S} l_{jk}} \varrho^{n - \mathrm{S} k_i} \prod_i \varrho_i^{\mu - k_i} \prod\nolimits_{jk}^{*} (\varrho_j \varrho_k)^{-l_{jk}} \times g(\xi \alpha)\,.$$

Folglich wird nicht allein $\mathrm{S} k_i = n$, sondern auch

$$\mathrm{S} l_{jk} = p \quad \text{und} \quad \mu = k_i + l_i\,,$$

weil

$$\prod\nolimits_{jk}^{*}(\varrho_j\varrho_k)^{l_{jk}} = \prod\nolimits_i \varrho_i^{l_i} \qquad \text{nebst} \qquad \mathrm{S}\, l_i = 2\,\mathrm{S}\, l_{jk} = 2p\,,$$

nachdem wir durch l_i den Exponenten von ϱ_i in $\prod\limits_{n\,\prime\prime}^{*}$ bezeichnet haben. Es wird also von der symmetrischen Summe für $g(\overset{m}{x}\alpha)$ erfordert, daß jeder Term derselben in Bezug auf jede Wurzel x_i der Funktion $f(\overset{m}{x})$ vom Grade μ sei.[1])

Selbstverständlich liefert ein Aggregat solcher symmetrischen Summen gleichfalls eine Kovariante von f, wenn Grad und Dimension, also auch das *Gewicht* der Einzelsummen übereinstimmen. Wir dürfen noch bemerken, daß für eine Invariante in dem allgemeinen Glied der symmetrischen Summe der Faktor $\prod_i$ fehlt, also $k_i = 0$, $l_i = \mu$ werden, sowie daß die Kovariante g durch $f^{k'}$ teilbar wird, wenn k' den kleinsten der Exponenten k_i bedeutet. Schreibt man also $k_i - k'$ für k_i, so bleibt die symmetrische Summe kovariant und sinkt auf den Grad $n - k'm$, Dimension $\mu - k'$, während das Gewicht p unverändert bleibt.

8.

Setzt man bei einer Kovariante g von f

$$b_k = \mathrm{S}\,\mathfrak{k}\, a_0^{k_0} a_1^{k_1} \ldots a_m^{k_m}\,,$$

so ist nicht allein

$$\mathop{\mathrm{S}}_{i=0}^{m} k_i = \mu\,, \qquad \text{sondern auch} \qquad \mathop{\mathrm{S}}_{0}^{m} i k_i = p + k\,.$$

In der Tat erhält man für

$$x = \delta\xi\,, \quad \varepsilon = \delta\,, \quad \varrho = 1\,, \quad fx = \varphi\xi\,, \quad \delta^p g x = \chi\xi\,,$$

$$\alpha_i = \delta^{m-i} a_i\,, \quad \beta_i = \delta^{n+p-k} b_k = \mathrm{S}\,\mathfrak{k}\,\alpha_0^{k_0}\alpha_1^{k_1}\ldots\alpha_m^{k_m}$$

$$= \delta^{m\mu - \mathrm{S}\, i k_i}\, b_k$$

---

1) Durch Vertauschung von m und μ entsteht der sogenannte Sylvester-Hermite'sche *Reziprozitätssatz*, nach welchem jeder Kovariante $g(\overset{n\mu}{x\alpha})$ von $f(\overset{m}{x})$ eine Kovariante $g(\overset{nm}{x\alpha})$ von $f(\overset{\mu}{x})$ entspricht, während n und p unverändert bleiben. Folglich besitzt eine Form m-ten Grades ebenso viele Kovarianten μ-ter Dimension, wie eine Form μ-ten Grades Kovarianten m-ter Dimension: da die entsprechenden Kovarianten zugleich vom nämlichen Grade und Gewichte sind, so müssen speziell auch die Invarianten als solche einander entsprechen. Wegen des Beweises müssen wir auf die Abhandlungen von Sylvester und Hermite in Bd. 8 und 9 des *Cambridge and Dublin Mathemat. Journal* verweisen.

oder

$$\mathrm{S}\, i k_i = m\mu - n - p + k = p + k$$

Man schließt daraus, daß

$$\mathop{\mathrm{S}}_{i=0}^{m} a_i \frac{\partial b_k}{\partial a_i} = \mu b_k \quad \text{und} \quad \mathop{\mathrm{S}}_{0}^{m} i a_i \frac{\partial b_k}{\partial a_i} = (p + k) b_k \,,$$

und durch Verbindung beider Gleichungen:

$$\mathrm{S}\,(m - i) a_i \frac{\partial b_k}{\partial a_i} = (p + n - k) b_k \,.$$[1]

Ebenso wird für

$$c_k = \mathrm{S}\, \mathfrak{k}\, a_0^{k_0} a_1^{k_1} \ldots a_m^{k_m} b_0^{l_0} b_1^{l_1} \ldots b_n^{l_n} \,,$$

$$\mathrm{S}\, k_i = \mu \,, \quad \mathrm{S}\, l_i = \nu \,, \quad \mathrm{S}\, i k_i + \mathrm{S}\, i l_i = q + k$$

gefunden, nebst den Differentialrelationen

$$\text{(A)} \qquad \mathop{\mathrm{S}}_{0}^{m} i a_i \frac{\partial c_k}{\partial a_i} + \mathop{\mathrm{S}}_{0}^{n} i b_i \frac{\partial c_k}{\partial b_i} = (q + k) c_k \,,$$

$$\text{(B)} \qquad \mathrm{S}\,(m - i) a_i \frac{\partial c_k}{\partial a_i} + \mathrm{S}\,(n - i) b_i \frac{\partial c_k}{\partial b_i} = (q + l - k) c_k \,.$$

Für

$$x = \frac{1}{\xi} \,, \quad \delta = \delta_3 = 0 \,, \quad \delta_1 = \delta_2 = 1 \,, \quad \varepsilon = -1 \,, \quad \varrho = \xi \,,$$

ist

$$\xi^m f x = \varphi \xi \,, \quad (-1)^p \xi^n g x = \chi \xi \,, \quad \alpha_i = a_{m-i} \,, \quad \beta_i = (-1)^p b_{n-i} \,,$$

folglich geht

$$b_{n-k} = (-1)^p\, \mathrm{S}\, \mathfrak{k}\, a_0^{k_m} a_1^{k_{m-1}} \ldots a_m^{k_0}$$

aus b_k durch Umkehr der Reihenfolge der Exponenten k_i (oder der Koeffizienten a_i) unter Hinzutritt des Faktors $(-1)^p$ hervor. Entsprechend erhält man

$$c_{l-k} = (-1)^q\, \mathrm{S}\, \mathfrak{k}\, a_0^{k_m} a_1^{k_{m-1}} \ldots a_m^{k_0} b_0^{l_n} b_1^{l_{n-1}} \ldots b_n^{l_0} \,.$$

Wenn der Grad n oder l Null ist, so ergibt sich der Satz: „eine *In-*

---

1) Weiter kann man anmerken, daß in Bezug auf den Modul 2

$$\mathrm{S}\,(2i+1) k_{2i+1} \equiv \mathrm{S}\, k_{2i+1} \equiv p + k \,,$$

mithin

$$\mathrm{S}\, k_{2i} \equiv p + k + \mu \,, \quad \text{so daß für} \quad k \equiv n \equiv m\mu \bmod 2$$

in den betreffenden Gliedern der Kovariante, wenn m ungerade, $\mathrm{S}\, k_{2i} \equiv p$, und wenn m gerade, $\mathrm{S}\, k_{2i+1} \equiv p$ sein muß. Für $k = n + 1$ tritt $p + 1$ an die Stelle von p.

variante $G = \mathrm{S}\, \mathfrak{k}\, a_0^{k_0} a_1^{k_1} \ldots a_m^{k_m}$ der Funktion f, resp. eine simultane Invariante von f und g $H = \mathrm{S}\, \mathfrak{k}\, a_0^{k_0} a_1^{k_1} \ldots a_n^{k_n} b_0^{l_0} b_1^{l_1} \ldots b_n^{l_n}$, bleibt ungeändert, *oder* kehrt ihr Vorzeichen um, wenn man a_i mit a_{m-i} und b_i mit b_{n-i} vertauscht." Der erste Fall tritt ein, wenn das Gewicht $p = \frac{1}{2} m\mu$ resp. $q = \frac{1}{2}(m\mu + n\nu)$ gerade, der zweite, wenn dasselbe ungerade ist. Im letzteren Falle wird die Invariante auch wohl nach Art. 4 als *schief* (*gauche*) bezeichnet.

Summiert man jetzt die für $(q+k)c_k$ und $(q+l-k)c_k$ gefundenen Ausdrücke (A) und (B) in Bezug auf k unter Hinzufügung des Faktors $\frac{\partial h}{\partial c_k} = \bar{l}_k x^{l-k}$, so erhält man die Formeln

$$qh + \mathrm{S}_k\, k\bar{l}_k c_k x^{l-k} = (q+l)h - xh' = \mathrm{S}\, i a_i \frac{\partial h}{\partial a_i} + \mathrm{S}\, i b_i \frac{\partial h}{\partial b_i}, \tag{1}$$

nebst

$$qh + xh' = \mathrm{S}\,(m-i) a_i \frac{\partial h}{\partial a_i} + \mathrm{S}\,(n-i) b_i \frac{\partial h}{\partial b_i}\,. \tag{2}$$

Für eine Kovariante g von f allein wird einfacher

$$(p+n)g - x\frac{\partial g}{\partial x} = \mathrm{S}\, i a_i \frac{\partial g}{\partial a_i}\,.$$

$$pg + x\frac{\partial g}{\partial x} = \mathrm{S}\,(m-i) a_i \frac{\partial g}{\partial a_i}\,.$$

Den vorstehenden Gleichungen stehen ähnliche zur Seite, welche sich durch folgende Betrachtungen ergeben. Gibt man x ein Inkrement dx, so wächst $f(x)$ um $f'(x)dx$, folglich

$$a_i \text{ um } da_i = i a_{i-1} dx\,, \qquad b_i \text{ um } db_i = i b_{i-1} dx\,,$$

mithin

$$c_k \text{ um } dc_k = k c_{k-1} dx = \left(\mathrm{S}\, i a_{i-1} \frac{\partial c_k}{\partial a_i} + \mathrm{S}\, i b_{i-1} \frac{\partial c_k}{\partial b_i}\right) dx\,,$$

oder

$$k c_{k-1} = \mathrm{S}\, i a_{i-1} \frac{\partial c_k}{\partial a_i} + \mathrm{S}\, i b_{i-1} \frac{\partial c_k}{\partial b_i}\,. \tag{C}$$

Diese Gleichung kann als eine identische Gleichung zwischen den Koeffizienten a und b angesehen werden, welche auch erfüllt werden muß, wenn man a_{m-i} und b_{n-i} statt a_i und b_i schreibt. Dadurch geht aber c_k in $(-1)^q c_{l-k}$ über, so daß

$$k c_{l-k+1} = \mathrm{S}\, i a_{m-i+1} \frac{\partial c_{l-k}}{\partial a_{m-i}} + \mathrm{S}\, i b_{n-i+1} \frac{\partial c_{l-k}}{\partial b_{n-i}}\,,$$

oder

$$(l-k) c_{k+1} = \mathrm{S}\,(m-i) a_{i+1} \frac{\partial c_k}{\partial a_i} + \mathrm{S}\,(n-i) b_{i+1} \frac{\partial c_k}{\partial b_i}\,. \tag{D}$$

Die Gleichungen (C) und (D) zeigen, wie aus *einem* Koeffizienten c_k der Kovariante alle übrigen gefunden werden.

Multipliziert man wieder (C) und (D) mit $\frac{\partial h}{\partial c_k} = \bar{l}_k x^{l-k}$, so folgt durch Summation nach k wegen

$$h' = \frac{\partial h}{\partial x} = \mathrm{S}(l-k)\bar{l}_k c_k x^{l-k-1} = \mathrm{S}\, k \bar{l}_k c_{k-1} x^{l-k},$$

$$x(lh - xh') = \mathrm{S}(l-k)\bar{l}_k c_{k+1} x^{l-k} = \mathrm{S}\, k \bar{l}_k c_k x^{l-k+1}:$$

$$(3) \qquad \mathrm{S}\, k c_{k-1} \frac{\partial h}{\partial c_k} = h' = \mathrm{S}\, i a_{i-1} \frac{\partial h}{\partial a_i} + \mathrm{S}\, i b_{i-1} \frac{\partial h}{\partial b_i},$$

$$(4) \quad \mathrm{S}(l-k) c_{k+1} \frac{\partial h}{\partial c_k} = x(lh - xh') = \mathrm{S}(m-i) a_{i+1} \frac{\partial h}{\partial a_i} + \mathrm{S}(n-i) b_{i+1} \frac{\partial h}{\partial b_i},$$

nebst

$$lxh = \mathrm{S}\left(i a_{i-1} x^2 + (m-i) a_{i+1}\right) \frac{\partial h}{\partial a_i} + \mathrm{S}\left(i b_{i-1} x^2 + (n-i) b_{i+1}\right) \frac{\partial h}{\partial b_i},$$

$$0 = 2qh + \mathrm{S}\left(i a_{i-1} x - m a_i + (m-i) a_{i+1} \frac{1}{x}\right) \frac{\partial h}{\partial a_i} +$$

$$+ \mathrm{S}\left(i b_{i-1} x - n b_i + (n-i) b_{i+1} \frac{1}{x}\right) \frac{\partial h}{\partial b_i}.$$

Schließlich kann man für $h = x^l \mathfrak{h}$, $1 = x\mathfrak{x}$ auch schreiben:

$$lxh - x^2 \frac{\partial h}{\partial x} = x^l \frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial \mathfrak{x}},$$

oder

$$\frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial \mathfrak{x}} = \mathrm{S}(m-i) a_{i+1} \frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial a_i} + \mathrm{S}(n-i) b_{i+1} \frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial b_i},$$

wo

$$\mathfrak{h} = c_0 + \bar{l}_1 c_1 \mathfrak{x} + \bar{l}_2 c_2 \mathfrak{x}^2 \cdots + c_l \mathfrak{x}^l.$$

9.

Der Ausdruck einer beliebigen (simultanen) Kovariante h von f und g kann mit Hilfe ihres Wertes für $x = 0$ gebildet werden. Hierzu setze man in den Gleichungen

$$\varphi\xi = \varrho^m f, \qquad \chi\xi = \varrho^n g \qquad \text{und} \qquad \psi\xi = \varepsilon^q \varrho^l h,$$

$x = \xi + \mathfrak{x}$, wodurch $\delta = 1$, $\delta_1 = \mathfrak{x}$, $\delta_2 = 0$, $\delta_3 = 1$, $\varepsilon = 1$, $\varrho = 1$ werden, so ergibt sich für $\mathfrak{f} = f(\mathfrak{x})$ usw.

$$\varphi\xi = f(\mathfrak{x}+\xi) = \mathfrak{f} + \widehat{m}_1 \mathfrak{f}_, \xi + \widehat{m}_2 \mathfrak{f}_{,,} \xi^2 \cdots + \mathfrak{f}_{(m)} \xi^m ,$$

$$\chi\xi = \mathfrak{g} + \widehat{n}_1 \mathfrak{g}_, \xi + \widehat{n}_2 \mathfrak{g}_{,,} \xi^2 \ldots, \qquad \psi\xi = \mathfrak{h} + \widehat{l}_1 \mathfrak{h}_, \xi + \widehat{l}_2 \mathfrak{h}_{,,} \xi^2 \ldots$$

Da nun die Koeffizienten in ψ ebenso von denen in φ und χ abhängen, wie die c von den a und b, so erhält man der Gleichung

$$c_l = h(0) = \mathrm{S}\, \mathfrak{l}\, a_0^{k_0} a_1^{k_1} \ldots a_m^{k_m} b_0^{l_0} b_1^{l_1} \ldots b_n^{l_n}$$

entsprechend

$$\mathfrak{h} = \psi(0) = \mathrm{S}\, \mathfrak{l}\, \mathfrak{f}_{(m)}^{k_0} \mathfrak{f}_{(m-1)}^{k_1} \cdots \mathfrak{f}^{k_m} \mathfrak{g}_{(n)}^{l_0} \mathfrak{g}_{(n-1)}^{l_1} \cdots \mathfrak{g}^{l_n} ,$$

oder wenn x statt $\mathfrak{x}$ geschrieben wird:

$$h(x) = \mathrm{S}\, \mathfrak{l}\, f^{k_m} f_,^{k_m - 1} \ldots f_{(m)}^{k_0} g^{l_n} g_,^{l_m - 1} \ldots g_{(n)}^{l_0} .$$

Ist g Kovariante von f allein, so gelten selbstverständlich die einfacheren Formeln

$$g(0) = b_n = \mathrm{S}\, \mathfrak{n}\, a_0^{k_0} a_1^{k_1} \ldots a_m^{k_m}$$

$$g(x) = \mathrm{S}\, \mathfrak{n}\, f^{k_m} f_,^{k_m - 1} \ldots f_{(m)}^{k_0} .$$

Die gefundenen Ausdrücke lehren, daß sich *jede* Kovariante oder Invariante von $f\, g \ldots$ als ganze Funktion der Differentialquotienten $f_{(i)} g_{(i)} \ldots$ darstellen läßt, und zwar beträgt die Ordnung ϖ der Differentiationen

$$\varpi = \mathrm{S}\,(m-i)k_i + \mathrm{S}\,(n-i)l_i = m\mu + n\nu - q - l = q ,$$

ist also dem Gewichte gleich. Der Grad der einzelnen Glieder der Summe dagegen wird

$$\mathrm{S}\, i k_i + \mathrm{S}\, i l_i = q + l .$$

Da nun h vom l-ten Grade sein soll, so müssen die numerischen Koeffizienten $\mathfrak{l}$ der ganzen Funktion so beschaffen sein, daß sich die q höchsten Potenzen von x wegheben. Die beregte Eigenschaft, daß der Grad der ganzen Funktionen von $f\, g$ und ihren Differentialquotienten sich um ebenso viele Einheiten erniedrigt, als die Ordnung der Differentiationen, oder was dasselbe ist, als das Gewicht der Kovariante beträgt, hätte man bei der Definition einer Kovariante als Ausgangspunkt nehmen können.[1])

---

1) Selbstverständlich kann man auch von dem Ausdrucke für

$$c_0 = \mathrm{S}\, \mathfrak{o}\, a_0^{k_0} a_1^{k_1} \ldots a_m^{k_m} b_0^{l_0} b_1^{l_1} \ldots b_n^{l_n}$$

ausgehen und

$$c_l = (-1)^q\, \mathrm{S}\, \mathfrak{o}\, a_0^{k_m} a_1^{k_m - 1} \ldots a_m^{k_0} b_0^{l_n} b_1^{l_n - 1} \ldots b_n^{l_0}$$

setzen, wodurch

$$h(x) = (-1)^q\, \mathrm{S}\, \mathfrak{o}\, f^{k_0} f_,^{k_1} \ldots f_{(m)}^{k_m} g^{l_0} g_,^{l_1} \ldots g_{(n)}^{l_n}$$

In dem Summenausdruck für h hat x^{l+q} den Koeffizienten

$$\mathrm{S}\,\mathfrak{l}\, a_0^{\mathrm{S}k_i} b_0^{\mathrm{S}l_i} = a_0^{\mu} b_0^{\nu}\, \mathrm{S}\,\mathfrak{l}\,,$$

folglich ergibt sich die Gleichung

$$\mathrm{S}\,\mathfrak{l} = 0\,,$$

ausgenommen den Fall $q = 0$ oder $k_m = \mu$, $l_n = \nu$, d. i. $hx = f^{\mu} g^{\nu}$. Wenn für $q > 1$ auch der Koeffizient von x^{l+q-1} verschwinden soll, so erhält man die Bedingung

$$0 = \mathrm{S}\,\mathfrak{l}\, a_0^{\mu-1} b_0^{\nu-1} (a_1 b_0\, \mathrm{S}\, ik_i + a_0 b_1\, \mathrm{S}\, il_i)\ .$$

Ist nun h Kovariante von f allein, so wird

$$\mathrm{S}\, ik_i = q + l\,, \qquad \mathrm{S}\, il_i = 0\,,$$

mithin bleibt alsdann das Verschwinden von $\mathrm{S}\,\mathfrak{l}$ die ausreichende Bedingung, woraus zu schließen, daß das Gewicht q der Kovariante einer ganzen Funktion überhaupt nicht der Einheit gleich sein kann. Wir werden bald zeigen, daß nicht bloß die Summe $\mathrm{S}\,\mathfrak{l}$ der Koeffizienten in c_l, sondern allgemeiner $\mathrm{S}\,\mathfrak{k}$ in c_k verschwindet. Man kann ferner bemerken, daß die Funktion $(a_0 x + a_1)^m$ außer sich selbst gar keine Kovariante besitzt, weil für

$$f = (a_0 x + a_1)^m, \qquad a_i = a_0^{m-i} a_1^{i} \qquad \text{und} \qquad f_{(i)} = a_0^{i} (a_0 x + a_1)^{m-i}$$

wird, also h wegen $\mathrm{S}\,\mathfrak{l} = 0$ identisch verschwindet.

Wenn $h_1 h_2$ .. verschiedene Kovarianten bezeichnen, zwischen deren Nullwerten eine algebraische Gleichung stattfindet, so besteht dieselbe Gleichung auch für variable Werte von x. Denn jede identische Gleichung zwischen den Koeffizienten a und b bleibt identisch, wenn man $f_{(i)}$ und $g_{(i)}$ statt a_{m-i} und b_{n-i} schreibt. Aus gleichem Grunde kann man aus der Gleichung (D) des vorigen Art., welche für $k = l$

$$0 = \mathrm{S}\,(m-i) a_{i+1} \frac{\partial h(0)}{\partial a_i} + \mathrm{S}\,(n-i) b_{i+1} \frac{\partial h(0)}{\partial b_i}$$

---

hervorgeht. Hier wird

$$\varpi = \mathrm{S}\, ik_i + \mathrm{S}\, il_i = q\,,$$

während der Grad der einzelnen Glieder

$$\mathrm{S}\,(m-i) k_i + \mathrm{S}\,(n-i) l_i = m\mu + n\nu - q = q + l$$

erhalten wird, also mit den oben abgeleiteten Resultaten in vollem Einklang.

ergibt, durch Einführung von $f_{(i)}$ und $g_{(i)}$ die weitere Gleichung ableiten:

$$0 = \mathrm{S}\, i f_{(i-1)} \frac{\partial h}{\partial f_{(i)}} + \mathrm{S}\, i g_{(i-1)} \frac{\partial h}{\partial g_{(i)}} .$$

Diese Relationen können zur Bestimmung der Koeffizienten $\mathfrak{l}$ im Ausdruck von h benutzt werden.

10.

Für die Bildung von Kovarianten mögen hier noch einige Vorschriften von allgemeinerer Natur entwickelt werden, welche häufig Anwendung finden. Wenn g eine Kovariante von f (Gewicht $p = \frac{1}{2}(m\mu - n)$) und h eine Kovariante oder Invariante von g (Gewicht $q = \frac{1}{2}(n\nu - l)$) bedeutet, so wird auch h Kovariante oder Invariante von f, wobei das Gewicht $r = \nu p + q$ und die Dimension $\mu\nu$ hervorgeht. Dies folgt sogleich aus den Gleichungen

$$\varrho^m f(xa) = f(\xi\alpha), \quad \varepsilon^p \varrho^n g(xb) = g(\xi\beta) \quad \text{oder} \quad \varepsilon^p \varrho^n g(x\overset{\mu}{a}) = g(\xi\overset{\mu}{\alpha}),$$

$$\varrho^n g(xb) = g(\xi\beta'), \quad \varepsilon^q \varrho^l h(xc) = h(x\gamma') = \varepsilon^q \varrho^l h(x\overset{\nu}{b}) = h(\xi\overset{\nu}{\beta'}),$$

$$\varepsilon^{\nu p + q} \varrho^l h(xc) = h(\xi\gamma) = \varepsilon^r \varrho^l h(x\overset{\mu\nu}{a}) = h(\xi\overset{\mu\nu}{\alpha}).$$

Denn da γ' von β' ebenso abhängt, wie c von b (nämlich durch Ausdrücke von der ν-ten Dimension), und $\beta = \varepsilon^p \beta'$ von α, wie b von a, so hängt auch $\gamma = \varepsilon^{\nu p} \gamma'$ von α ebenso ab, wie c von a.

Ebenso wird jede Kovariante h eines Produktes $fg = \mathfrak{p}$ simultane Kovariante der beiden Faktoren f und g vom Gewicht $q = \frac{1}{2}(m + n - l)$, wie die Gleichungen

$$\varrho^m f(xa) = f(\xi\alpha) = \varphi, \quad \varrho^n g(xb) = g(\xi\beta) = \chi, \quad \varepsilon^q \varrho^l h(xc) = h(\xi\gamma)$$

zeigen. Denn da durch Multiplikation

$$\varrho^{m+n} fg = \varphi\chi \qquad \text{oder} \qquad \varrho^{m+n} \mathfrak{p}(xd) = \mathfrak{p}(\xi\delta)$$

erhalten wird, und γ von δ ebenso abhängen soll, wie c von d, so muß neben δ auch γ von α und β ebenso abhängen, wie d und c von a und b.

Ein einfaches Verfahren, um zu zwei Funktionen f und g eine Kovariante h abzuleiten, beruht auf dem von Gordan und Clebsch sogenannten *Überschiebungsprozesse*:

$$h = \frac{1}{m} f' g - \frac{1}{n} f g' = f_{,} g - f g_{,} = [f g] \,,$$

denn mittelst

$$\varphi_{,} = \delta_2 \varrho^{m-1} f + \varepsilon \varrho^{m-2} f_{,} \quad \text{und} \quad \chi_{,} = \delta_2 \varrho^{n-1} g + \varepsilon \varrho^{n-2} g_{,}$$

erhält man sofort

$$\varepsilon \varrho^{m+n-2} h = \varphi_{,} \chi - \varphi \chi_{,} = [\varphi \chi] = h(\xi \alpha \beta) \,.$$

Damit ist eine simultane Kovariante h vom Grade $m+n-2$ und dem Gewichte $q = 1$ bestimmt, während die beiden Funktionen f und g als voneinander unabhängig vorausgesetzt werden. Die Koeffizienten in h sind dann bilineare homogene Funktionen der a und b.

Sollte jedoch g selbst als Kovariante von f (oder von noch weiteren Funktionen f_k) mit dem Gewicht $p = \frac{1}{2}(m\mu + m_k \mu_k - n)$ gegeben sein, so ist h als Kovariante der nämlichen Funktionen zu bezeichnen, deren Gewicht durch den Hinzutritt des Faktors ε^p in den Gleichungen für g und $g_{,}$ auf $q = p + 1$ steigt. In der Tat ergibt sich in Bezug auf die Koeffizienten von f die Dimension $\lambda = \mu + 1$, folglich wegen $l = m + n - 2$

$$q = \frac{1}{2}(m\lambda + m_k \mu_k - l) = p + 1 \,.$$

Man überzeugt sich ferner auf demselben Wege, daß die Überschiebung zweier *beliebigen* Kovarianten $[g \mathfrak{g}] = h$ stets wieder eine Kovariante h von f liefert, indem

$$\varepsilon^{p+\mathfrak{p}+1} \varrho^{n+\mathfrak{n}-2} h(x a) = h(\xi \alpha)$$

von der Dimension $\mu + \mathfrak{\mu}$ hervorgeht. Wir bemerken zu gelegentlichem Gebrauche die Identitäten

$$f[g h] + g[h f] + h[f g] = 0 \,,$$

$$[f j][g h] + [g j][h f] + [h j][f g] = 0 \,.$$

Als weitere Verallgemeinerung hat man die *Kovarianten der k-ten Überschiebung*

$$[f g]_k = f_{(k)} g - \hat{k}_1 f_{(k-1)} g_{,} + \hat{k}_2 f_{(k-2)} g_{,,} \cdots \pm f g_k = (-1)^k [g f]_k$$

eingeführt, wobei weder $f_{(k)}$ noch $g_{(k)}$ einen verschwindenden Nenner bekommen, also k weder m noch n übersteigen darf. $[f g]_k$ stellt die k-te Differenz dar aus der Reihe der Produkte:

$$f g_{(k)} \,, \quad f_{,} g_{(k-1)} \,, \quad f_{,,} g_{(k-2)} \,, \quad \ldots \,, \quad f_{(k-1)} g_{,} \,, \quad f_{(k)} g \,.$$

Auch hier findet man[1])

$$[\varphi\chi]_k = \varepsilon^k \varrho^{m+n-2k} [fg]_k = \varepsilon^k \varrho^{m+n-2k} h ,$$

also ist

$$h = (a_0 b_k - \widehat{k}_1 a_1 b_{k-1} \pm \cdots + (-1)^k a_k b_0) x^{m+n-2k} + \cdots$$

eine zuerst wohl von **Cayley** betrachtete Kovariante von f und g vom Grade $m+n-2k$, mit dem Gewichte $q=k$ und mit bilinearen Koeffizienten. Sind dagegen g und $\mathfrak{g}$ selbst Kovarianten von f mit den Gewichten p und $\mathfrak{p}$, so erhöhen sich Dimension und Gewicht von $[g\,\mathfrak{g}]_k$ auf $\lambda = \mu + \mathfrak{\mu}$ und $q = p + \mathfrak{p} + k$. Für $k=0$ wird $h = f \cdot g$, was man als *nullte* Überschiebung bezeichnen kann.

Für $m = n = k$ stellt $h = a_0 b_k \mp \cdots + (-1)^k a_k b_0$ eine Invariante dar. Um ein naheliegendes Beispiel zu geben, setzen wir einfach $g = f$, $p = 0$, wodurch die Kovariante

$$[ff]_k = f f_{(k)} - \widehat{k}_1 f_{\prime} f_{(k-1)} + \widehat{k}_2 f_{\prime\prime} f_{(k-2)} \mp \cdots$$

hervorgeht, welcher Ausdruck allerdings für *ungerade* Werte von k identisch verschwindet, aber für *gerade* k auf den $2(m-k)$-ten Grad steigt, mit dem Gewichte k und der zweiten Dimension. Für $k=m$ *gerade* liefert

$$[ff]_m = f f_{(m)} - \widehat{m}_1 f_{\prime} f_{(m-1)} + \widehat{m}_2 f_{\prime\prime} f_{(m-2)} \mp \cdots$$

$$= \frac{1}{m!} \left(f f^{(m)} - f' f^{(m-1)} + f'' f^{(m-2)} \mp \cdots \right)$$

---

1) Zum Beweise der Kovarianteneigenschaft für die k-te Überschiebung reicht es aus, mittelst Differentiation daraus die Kovariante der $(k+1)$-ten Überschiebung herzuleiten. Man erhält leicht:

$$[fg]_{k+1} = [f_{\prime} g]_k - [f g_{\prime}]_k ,$$

nebst

$$[fg]_k' = (m-k)[f_{\prime} g]_k + (n-k)[f g_{\prime}]_k ,$$

oder

$$(m+n-2k)[f_{\prime} g]_k = [fg]_k' + (n-k)[fg]_{k+1} ,$$

$$(m+n-2k)[f g_{\prime}]_k = [fg]_k' - (m-k)[fg]_{k+1} ,$$

ferner

$$[\varphi_{\prime} \chi]_k = \varepsilon^{k+1} \varrho^{m+n-2k-2} \left([f_{\prime} g]_k + \frac{\varrho'}{\varrho} [fg]_k \right) ,$$

$$[\varphi \chi_{\prime}]_k = \varepsilon^{k+1} \varrho^{m+n-2k-2} \left([f g_{\prime}]_k + \frac{\varrho'}{\varrho} [fg]_k \right) ,$$

folglich durch Subtraktion:

$$[\varphi\chi]_{k+1} = \varepsilon^{k+1} \varrho^{m+n-2k-2} [fg]_{k+1} .$$

den Ausdruck einer *Invariante* $2G$ vom Gewicht m und der zweiten Dimension, während die Variable x ganz herausgegangen ist. Mithin erhält man für $x = 0$:

$$2G = a_0 a_m - \widehat{m}_1 a_1 a_{m-1} + \widehat{m}_2 a_2 a_{m-2} \mp \quad \text{usw.}$$

II.

Selbstverständlich gestatten die bisher angestellten Betrachtungen über Kovarianten oder Invarianten ganzer Funktionen Verallgemeinerungen nach mehrfacher Richtung, namentlich bei Vermehrung der Anzahl der Variabeln. Um gewissen Sätzen und Ableitungen eine größere Übersichtlichkeit und Eleganz zu verleihen, hat man *homogene* Ausdrücke mittelst Einführung einer neuen Variablen y zu Grunde gelegt, also statt der Funktion $f(x)$ die *binäre Form* $f(xy)$ als Ausgangspunkt gewählt. So erhält man z. B. für

$$f = a_0 x^m + \widehat{m}_1 a_1 x^{m-1} y + \widehat{m}_2 a_2 x^{m-2} y^2 \cdots + a_m y^m$$

$$= \frac{1}{m}\left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \text{und} \quad g = \frac{1}{n}\left(x \frac{\partial g}{\partial x} + y \frac{\partial g}{\partial y}\right),$$

$$h = [fg] = \frac{y}{mn}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\right) = \frac{y}{mn}\frac{\partial (fg)}{\partial (xy)},$$

so daß die Kovariante h, nach Weglassung des Faktors $y = \delta_2 \xi + \delta_3 = \varrho$, mit der Funktionaldeterminante der Funktionen f und g nach x und y übereinkommt. Der Vorteil besteht hauptsächlich darin, daß die lineare Substitution $x = \frac{\delta \xi + \delta_1}{\delta_2 \xi + \delta_3}$ durch die beiden einfacheren $x = \delta \xi + \delta_1$, $y = \delta_2 \xi + \delta_3$ ersetzt wird, und tritt bei mehr Variabeln noch mehr hervor.

Wir beschränken uns jedoch in dieser Beziehung auf die Betrachtung der einfachsten, auf die lineare Transformation beliebig vieler Variabeln bezüglichen Fälle. Die elementare Auflösung eines Systems *linearer* Gleichungen von der Form

$$\underset{i}{\mathrm{S}}\, a_i^k x_i = y_k \quad \text{gibt} \quad R x_i = \underset{k}{\mathrm{S}}\, A_i^k y_k,$$

wo

$$R = | a_i^k | = \mathrm{S}\, a_i^k A_i^k$$

die Determinante des Systems bezeichnet. Führt man nun die lineare Transformation in der Gestalt aus:

$$x_i = \underset{k}{\mathrm{S}}\, \delta_i^k \xi_k\,, \qquad \text{wodurch} \qquad y_k = \underset{i}{\mathrm{S}}\, \alpha_i^k \xi_i$$

hervorgehen mag, so folgt

$$\alpha_h^k = \underset{i}{\mathrm{S}}\, \delta_i^h a_i^k, \quad \text{und für} \quad \mathsf{P} = |\alpha_i^k| = \mathrm{S}\, \alpha_i^k \mathsf{A}_i^k :$$

$$\mathsf{P}\, \xi_i = \underset{k}{\mathrm{S}}\, \mathsf{A}_i^k y_k\,.$$

Hier ist aber nach einem bekannten Satze der Determinantentheorie

$$\mathsf{P} = \varepsilon R\,, \qquad \text{wenn} \qquad \varepsilon = |\delta_i^k|$$

die Determinante der linearen Substitution bedeutet, d. h. R ist eine Invariante der linearen Funktionen $y = f x_i$ vom Gewicht 1.

Betrachtet man jetzt die (homogene) *quadratische* Form

$$f(x_1 x_2 \ldots x_n) = f x = \underset{ik}{\mathrm{S}}\, a_i^k x_i x_k\,, \qquad a_i^k = a_k^i\,,$$

so wird

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = 2 \underset{i}{\mathrm{S}}\, a_i^k x_i\,.$$

Durch die lineare Transformation $x_i = \underset{k}{\mathrm{S}}\, \delta_i^k \xi_k$ ergibt sich

$$f = \underset{ik}{\mathrm{S}}\, \alpha_i^k \xi_i \xi_k\,, \qquad \alpha_i^k = \alpha_k^i\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = 2 \underset{i}{\mathrm{S}}\, \beta_i^k \xi_i\,, \qquad \text{wo} \qquad \beta_h^k = \underset{i}{\mathrm{S}}\, \delta_i^h a_i^k\,.$$

Zugleich erhält man

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_k} = 2 \underset{i}{\mathrm{S}}\, \alpha_i^k \xi_i = 2 \underset{i}{\mathrm{S}}\, b_i^k x_i\,, \qquad \text{nebst} \qquad \alpha_h^k = \underset{i}{\mathrm{S}}\, \delta_i^h b_i^k\,.$$

Da aber

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_k} = \underset{i}{\mathrm{S}}\, \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} = \underset{i}{\mathrm{S}}\, \delta_i^k \frac{\partial f}{\partial x_i}\,,$$

so hat man auch

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_k} = 2 \underset{hi}{\mathrm{S}}\, \delta_h^k a_h^i x_i = 2 \underset{i}{\mathrm{S}}\, \beta_k^i x_i\,,$$

also $b_i^k = \beta_k^i$. Mithin folgt

$$|\beta_i^k| = |b_i^k| = \varepsilon\, |a_i^k|\,, \qquad \text{neben} \qquad |\alpha_i^k| = \varepsilon\, |b_i^k| = \varepsilon^2 |a_i^k|\,,$$

d. h. die symmetrische Determinante $|a_i^k|$ ist eine Invariante der Form f vom Gewicht 2.

Für eine *beliebige* ganze Funktion $F(x_1 x_2 \dots x_n) = Fx$ bilde man mit den Argumenten $x_i + h y_i$ die Taylor'sche Entwickelung

$$F(x + h y) = F x + h \Phi_1 (x y) + \tfrac{1}{2} h^2 \Phi_2 (x y) + \tfrac{1}{6} h^3 \Phi_3 (x y) \dots$$

und setze

$$x_i = \mathop{\mathrm{S}}_k \delta_i^k \xi_k \,, \qquad y_i = \mathop{\mathrm{S}}_k \delta_i^k \eta_k \,,$$

so wird der Koeffizient von h^p:

$$\frac{1}{p!} \Phi (x y) = \mathop{\mathrm{S}}_\nu \frac{y_1^{\nu_1} y_2^{\nu_2} \dots y_n^{\nu_n}}{\nu_1! \, \nu_2! \dots \nu_n!} \cdot \frac{\partial^p F}{\partial x_1^{\nu_1} \partial x_2^{\nu_2} \dots \partial x_n^{\nu_n}} \,,$$

wenn die Summation $\mathop{\mathrm{S}}_\nu$ auf alle positiven Zahlen ν_i inkl. der Null erstreckt wird, deren Summe p beträgt. Für $p = 1, 2$ erhält man

$$\Phi_1 = \mathop{\mathrm{S}}_i \frac{\partial F}{\partial x_i} y_i \qquad \text{und} \qquad \Phi_2 = \mathop{\mathrm{S}}_{ik} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \, \partial x_k} y_i y_k \,,$$

wo die Indizes i und k unabhängig alle Werte von 1 bis n annehmen. Vermöge der linearen Transformation wird ebenso

$$F(\xi + h \eta) = F \xi + h \Phi_1 (\xi \eta) + \tfrac{1}{2} h^2 \Phi_2 (\xi \eta) + \cdots \,,$$

also auch

$$\Phi_1 = \mathop{\mathrm{S}}_i \frac{\partial F}{\partial \xi_i} \eta_i \qquad \text{und} \qquad \Phi_2 = \mathop{\mathrm{S}}_{ik} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_i \partial \xi_k} \eta_i \eta_k \,.$$

Die *quadratische* Form

$$f(y) = \mathop{\mathrm{S}}_{ik} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \, \partial x_k} y_i y_k = \mathop{\mathrm{S}}_{ik} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_i \partial \xi_k} \eta_i \eta_k$$

liefert für die sogen. *Hesse'sche Determinante*

$$H = \left| \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k} \right| , \qquad \mathsf{H} = \left| \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_i \partial \xi_k} \right| ,$$

die Gleichung

$$\mathsf{H} = \varepsilon^2 H \,,$$

d. h. H ist eine Kovariante der Funktion F mit dem Gewicht 2.

Bezeichnet man ferner durch $F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x)$ ein System von n Funktionen beliebigen Grades von $x_1 x_2 \dots x_n$ mit der ***Funktionaldeterminante***

$$D = \frac{\partial (F_1 F_2 \dots F_n)}{\partial (x_1 x_2 \dots x_n)} \,,$$

so erhält man vermöge der n linearen Gleichungen

$$\underset{i}{\mathrm{S}} \frac{\partial F_k}{\partial x_i} y_i = \underset{i}{\mathrm{S}} \frac{\partial F_k}{\partial \xi_i} \eta_i$$

die Relation

$$\frac{\partial (F_1 F_2 \ldots F_n)}{\partial (\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n)} = \Delta = \varepsilon D ,$$

mit anderen Worten, D ist eine Kovariante des Systems $F_1 F_2 \ldots F_n$ mit dem Gewicht 1.

12.

Wenn Fx eine *homogene* Funktion der n Variabeln x_i vom Grade m ausdrückt, so nennt man $\Phi_p(xy)$ die p-te **Polare** von F, für welche die Relation erfüllt ist:

$$\frac{1}{p!} \Phi_p(xy) = \frac{1}{(m-p)!} \Phi_{m-p}(yx) ,$$

wie aus der identischen Gleichung

$$F(x+hy) = h^m F\left(y + \frac{x}{h}\right)$$

hervorgeht. Sei z. B. $n = 2$, so erhält man:

$$\Phi_1 = \frac{\partial F}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} y_2 , \qquad \Phi_2 = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} y_1^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} y_1 y_2 + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} y_2^2 ,$$

usw. neben

$$mF = x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} , \qquad (m-1) \frac{\partial F}{\partial x_1} = x_1 \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + x_2 \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} ,$$

usw.

Schreibt man folglich

$$F(x_1 x_2) = x_2^m f(x) \qquad \text{nebst} \qquad x = \frac{x_1}{x_2} ,$$

so ergeben sich die Werte

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = m x_2^{m-1} f_{,} , \qquad \frac{\partial F}{\partial x_2} = m x_2^{m-1} (f - x f_{,}) , \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = m(m-1) x_2^{m-2} f_{,,} ,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = m(m-1) x_2^{m-2} (f_{,} - x f_{,,}) ,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = m(m-1) x_2^{m-2} (f - 2x f_{,} + x^2 f_{,,}) ,$$

usw. und damit für $y = \frac{y_1}{y_2}$:

$$\Phi_1 = m\, x_2^{m-1} y_2 \left(f - (x-y) f_{\prime}\right),$$

$$\Phi_2 = m(m-1)\, x_2^{m-2} y_2^2 \left(f - 2(x-y) f_{\prime} + (x-y)^2 f_{\prime\prime}\right),$$

allgemein

$$\frac{1}{p!}\,\Phi_p = \widehat{m}_p\, x_2^{m-p} y_2^p \left(f - \widehat{p}_1 (x-y) f_{\prime} + \widehat{p}_2 (x-y)^2 f_{\prime\prime} \mp \cdots\right).$$

Vertauscht man hier x und y, sowie p und $m-p$ und schreibt kurz $\mathfrak{f}$ für $f(y)$, so folgt der weitere Ausdruck

$$\frac{1}{p!}\,\Phi_p = \widehat{m}_p\, x_2^{m-p} y_2^p \left(\mathfrak{f} + \widehat{m-p}_1 (x-y)\mathfrak{f}_{\prime} + \widehat{m-p}_2 (x-y)^2 \mathfrak{f}_{\prime\prime} + \cdots\right).$$

Man schließt daraus, daß Φ_p in Bezug auf x und y von den Graden $m-p$ und p sein muß, während die höheren Potenzen sich von selbst wegheben.

Die lineare Transformation aber nimmt jetzt die Gestalt an:

$$x = \frac{\delta \xi + \delta_1}{\delta_2 \xi + \delta_3}, \qquad y = \frac{\delta \eta + \delta_1}{\delta_2 \eta + \delta_3},$$

wenn

$$\xi = \frac{\xi_1}{\xi_2}, \qquad \eta = \frac{\eta_1}{\eta_2}, \qquad \delta = \delta_1^1, \qquad \delta_1 = \delta_1^2, \qquad \delta_2 = \delta_2^1, \qquad \delta_3 = \delta_2^2$$

geschrieben werden. Setzt man also

$$\delta_2 \xi + \delta_3 = \varrho, \qquad \delta_2 \eta + \delta_3 = \varrho',$$

$$\varphi_p = f - \widehat{p}_1 (x-y) f_{\prime} + \widehat{p}_2 (x-y)^2 f_{\prime\prime} \mp \cdots = ((x-y)^p, f)_p$$

$$= \mathfrak{f} + \widehat{m-p}_1 (x-y)\, \mathfrak{f}_{\prime} + \widehat{m-p}_2 (x-y)^2\, \mathfrak{f}_{\prime\prime} + \cdots = ((y-x)^{m-p}, \mathfrak{f})_{m-p},$$

so hat man

$$F = \varrho^m f(x a) = f(\xi \alpha), \qquad \varrho^{m-p} \varrho'^p \varphi_p(x y a) = \varphi_p(\xi \eta \alpha),$$

und es wird durch das Stattfinden dieser Relationen φ_p als die p-te *Polare* von f definiert. Beide Gleichungen gehen ineinander über für $y = x$ oder $\eta = \xi$, $f = \varphi_p$, während für $x = 0$ oder $y = 0$:

$$\varphi_p(0\, y) = \mathfrak{f} - \widehat{m-p}_1\, \mathfrak{f}_{\prime} y + \widehat{m-p}_2\, \mathfrak{f}_{\prime\prime} y^2 \mp \cdots$$

$$= a_{m-p} y^p + \widehat{p}_1\, a_{m-p+1} y^{p-1} + \widehat{p}_2\, a_{m-p+2} y^{p-2} \cdots + a_m,$$

$$\varphi_p(x\, 0) = f - \widehat{p}_1 f_{\prime} x + \widehat{p}_2 f_{\prime\prime} x^2 \mp \cdots$$

$$= a_p x^{m-p} + \widehat{m-p}_1\, a_{p+1} x^{m-p-1} + \widehat{m-p}_2\, a_{p+2} x^{m-p-2} \cdots + a_m.$$

Eine Kovariante $\psi(xy)$ endlich von $\varphi(xy)$ in Bezug auf die Variable y wird zu einer Kovariante von $f(x)$, wenn man y durch x ersetzt.[1] Denn da für $k = \frac{1}{2}(\mu p - q)$ $\psi(y)$ einer Gleichung genügt von der Form

$$\varepsilon^k \varrho'^q \psi(xya) = \psi(x\eta\alpha)$$

vom Grade q, der Dimension μ und dem Gewichte k, während x auf den Grad $\mu(m-p)$ steigt, so erhält man durch Multiplikation mit $\varrho^{\mu(m-p)}$ für

$$y = x\,, \quad \eta = \xi\,, \quad \varrho' = \varrho\,, \quad l = \mu(m-p) + q = \mu m - 2k:$$

$$\varepsilon^k \varrho^l \psi(xa) = \psi(\xi\alpha)\,,$$

also eine Kovariante von f, Grad l, Dimension μ, Gewicht k.

13.

Es ist bereits bemerkt worden, daß ein Aggregat von Kovarianten nur dann kovariant bleibt, wenn die Summanden das nämliche Gewicht besitzen. Da das Produkt zweier (oder mehrerer) Kovarianten $hh_1 = h_2$ offenbar eine Kovariante liefert, deren Gewicht durch die Summe der Gewichte der Faktoren gegeben ist (und umgekehrt wird, wenn h_1 und h_2 Kovarianten sind, auch der Quotient $h = \frac{h_2}{h_1}$ eine solche), so können wir den Satz aussprechen: Bildet man eine ganze, mit unabhängigen (numerischen) Koeffizienten versehene Funktion verschiedener Kovarianten, so entsteht nur dann eine Kovariante, wenn die Gewichte der einzelnen Terme die nämlichen sind. Auch dürfen wir der Einfachheit halber annehmen, daß jene Funktion in Bezug auf die Koeffizienten *homogen* (und folglich in ihren einzelnen Termen auch von gleicher Dimension) sei, da entgegengesetzten Falles die homogenen Gruppen der ganzen Funktion auch getrennt als Kovarianten auftreten. Betrachten wir z. B. den Ausdruck

$$h = \mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{k} \alpha_i [fg_i]_i\,,$$

und sei für die Kovarianten g_i

$$\mu = \lambda - 1\,, \quad n = l - m + 2i\,, \quad p = q - i\,,$$

so ist h eine Kovariante von f, Dimension λ, Grad l, Gewicht q.

---

1) Weber, *Algebra*, Bd. I, S. 188.

Da die Anzahl aller zu gegebenen Funktionen gehörigen Kovarianten offenbar unerschöpflich ist, so fragt es sich, wie viel *unabhängige* Kovarianten existieren, zwischen denen keine algebraische Gleichung stattfindet. Daß deren Anzahl nur beschränkt sein kann, erhellt schon aus dem Umstande, daß die Anzahl der eingehenden Argumente eine begrenzte ist, und z. B. in $f(xa)$ nur $m + 2$ beträgt. Wenn diese aus der hinreichenden Anzahl von Kovarianten eliminiert werden, so gehen algebraische Gleichungen zwischen den Kovarianten hervor. Dasselbe gilt im Falle simultaner Kovarianten von der Elimination der Argumente der übrigen Formen. Die analoge Schlußweise läßt sich auf die Darstellung der Kovarianten durch Differentialquotienten in der Form

$$h = \mathrm{S}\,\{f^{k_m} f_{,}^{k_m - 1} \ldots f_{(m)}^{k_0}\, g^{l_n} g_{,}^{l_n - 1} \ldots g_{(n)}^{l_0}$$

anwenden. Mittelst $m+n$ Kovarianten h müssen sich jedenfalls die $m+n$ Größen $f_{(i)}$ und $g_{(i)}$ eliminieren lassen, so daß abgesehen von f und g die Anzahl der unabhängigen Kovarianten $m + n$ nicht übersteigen kann. Im Folgenden wird sich jedoch ergeben, daß ein *vollständiges System unabhängiger Kovarianten*, abgesehen wiederum von den Funktionen f und g selbst, nur aus $m + n - 1$ (simultanen) Kovarianten besteht, während bei *einer* Form fx sich alle Kovarianten algebraisch durch $m - 1$ (resp. m) unabhängige Kovarianten ausdrücken lassen. Sofern diese algebraischen Ausdrücke *rational* sind, nennt man die unabhängigen Kovarianten des betreffenden Systems *assoziiert*. Es wird sich zeigen, daß die Nenner solcher Ausdrücke stets auf eine Potenz von fx zurückgeführt werden können, so daß das Produkt jeder Kovariante in eine Potenz von f als *ganze* Funktion der assoziierten Kovarianten erscheint. Man hat aber weiter nachgewiesen, daß sich durch Hinzunahme einer endlichen Anzahl weiterer Kovarianten sogenannte vollständige Systeme *irreduktibler* Kovarianten bilden lassen, welche die Eigenschaft besitzen, daß *jede* Kovariante sich als *ganze* Funktion der irreduktibeln Kovarianten ausdrücken läßt. Auf die betreffende *Theorie von der Endlichkeit der irreduktibeln Formensysteme*, welche von Gordan, Mertens, Hilbert u. A. begründet worden ist, und eigentümliche Schwierigkeiten bietet, werden wir jedoch hier nicht näher eingehen.

14.

Zur Aufstellung eines vollständigen Systems *assoziierter* Kovarianten führt der Hermite'sche Fundamentalsatz[1]), zu welchem man durch die folgenden Betrachtungen gelangt.

1) *Crelle's Journal* Bd. 52, S. 23, mit der Bemerkung *„Voici ce qu'il m'a été donné de trouver après de longues méditations sur ce sujet."*

Für eine Kovariante hx kann man mittelst des Nullwertes $h(0)$ einen ähnlichen Ausdruck wie Art. 9 ableiten, wenn man in den Gleichungen

$$\varphi\xi = \varrho^m f\,, \quad \chi\xi = \varrho^n g \quad \text{und} \quad \psi\xi = \varepsilon^q \varrho^l h(xab) = h(\xi\alpha\beta)\,,$$

welche für $\varrho x = \delta\xi + \delta_1$ identisch werden,

$$\delta = \mathfrak{x}\,, \quad \delta_1 = \mathfrak{x}\mathfrak{f}_{,} - \mathfrak{f}\,, \quad \delta_2 = 1\,, \quad \delta_3 = \mathfrak{f}_{,}\,, \quad \text{mithin} \quad \varrho = \xi + \mathfrak{f}_{,}\,, \quad \varepsilon = \mathfrak{f}$$

substituiert. Dann tritt an die Stelle von x

$$\frac{\delta\xi + \delta_1}{\delta_2\xi + \delta_3} = \mathfrak{x} - \frac{\mathfrak{f}}{\xi + \mathfrak{f}_{,}}\,,$$

und man erhält durch die Entwickelung nach den Potenzen von ξ, wenn man zugleich x für $\mathfrak{x}$ schreibt:

$$\begin{aligned}
(\xi+f_{,})^m f\left(x - \frac{f}{\xi+f_{,}}\right) &= \varphi\xi = f(\xi+f_{,})^m - \widehat{m}_1 ff_{,}(\xi+f_{,})^{m-1} \pm \cdots \pm f^m f_{(m)} \\
&= f\left(\xi^m + \widehat{m}_2 f_2\,\xi^{m-2} + \widehat{m}_3 f_3\,\xi^{m-3} \cdots + f_m\right), \\
(\xi+f_{,})^n g\left(x - \frac{f}{\xi+f_{,}}\right) &= \chi\xi = g(\xi+f_{,})^n - \widehat{n}_1 f g_{,}(\xi+f)^{n-1} \pm \cdots \pm f^n g_{(n)} \\
&= g\xi^n + \widehat{n}_1\,\mathfrak{g}_1\,\xi^{n-1} + \widehat{n}\,\mathfrak{g}_2\,\xi^{n-2} \cdots + \mathfrak{g}_n\,, \\
f^q(\xi+f_{,})^l h\left(x - \frac{f}{\xi+f_{,}}\right) &= \psi\xi = f^q\left(h\xi^l + \widehat{l}_1\,\mathfrak{h}_1\,\xi^{l-1} + \widehat{l}_2\,\mathfrak{h}_2\,\xi^{l-2} \cdots + \mathfrak{h}_l\right).
\end{aligned}$$

Hier ist

$$\begin{aligned}
f_2 &= -f_{,}f_{,} + ff_{,,} = -[ff_{,}] = \frac{1}{2}[ff]_2\,, \\
f_3 &= -2f_{,}^3 + 3ff_{,}f_{,,} - f^2 f_{,,,} = 2[ff_2]\,, \\
f_4 &= -3f_{,}^4 + 6ff_{,}^2 f_{,,} - 4f^2 f_{,}f_{,,,} + f^3 f_{\text{IV}}\,, \ \ldots \\
f_i &= -(i-1)f_{,}^i + \widehat{i}_2 ff_{,}^{i-2} f_{,,} - \widehat{i}_3 f^2 f_{,}^{i-3} f_{,,,} \cdots + (-1)^i f^{i-1} f_{(i)}\,.
\end{aligned}$$

Da die Summe der Koeffizienten 0 ist, so überzeugt man sich leicht, daß für $f_{(i)} = (x+1)^{m-i}$ oder $a_i = 1$ die sämtlichen f_i verschwinden. Ferner erhält man

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_1 &= f_{,}g - fg_{,} = [fg]\,, \\
\mathfrak{g}_2 &= f_{,}^2 g - 2ff_{,}g_{,} + f^2 g_{,,}\,, \ \ldots \\
\mathfrak{g}_i &= f_{,}^i g - \widehat{i}_1 ff_{,}^{i-1} g_{,} + \widehat{i}_2 f^2 f_{,}^{i-2} g_{,,} - \widehat{i}_3 f^3 f_{,}^{i-3} g_{,,,} \cdots + (-1)^i f^i g_{(i)} \\
\mathfrak{h}_i &= f_{,}^i h - \widehat{i}_1 ff_{,}^{i-1} h_{,} + \widehat{i}_2 f^2 f_{,}^{i-2} h_{,,} - \widehat{i}_3 f^3 f_{,}^{i-3} h_{,,,} \cdots + (-1)^i f^i h_{(i)}\,.
\end{aligned}$$

Auch ist ohne Weiteres klar, daß man in der vorstehenden Ableitung die Funktionen f und g miteinander vertauschen, also die entsprechenden

Ausdrücke von $\mathfrak{f}_i$ und g_i bilden kann. Bedenkt man nun, daß jetzt

$$\alpha_i = ff_i\,, \quad \alpha_0 = f\,, \quad \alpha_1 = 0\,, \quad \beta_i = \mathfrak{g}_i\,, \quad \gamma_i = f^q \mathfrak{h}_i\,,$$

so geht den Gleichungen

$$h(0) = c_l = \mathrm{S}\,\mathfrak{l}\, a_0^{k_0} \ldots a_m^{k_m} b_0^{l_0} \ldots b_n^{l_n}\,,$$

$$c_0 = (-1)^q\, \mathrm{S}\,\mathfrak{l}\, a_0^{k_m} \ldots a_m^{k_0} b_0^{l_n} \ldots b_n^{l_0}\,,$$

$$f^q h = \gamma_0 = (-1)^q\, \mathrm{S}\,\mathfrak{l}\, \alpha_0^{k_m} \ldots \alpha_m^{k_0} \beta_0^{l_n} \ldots \beta_n^{l_0}\,,$$

wegen $\mathrm{S}\, k_i = \mu$ parallel die Formel:

$$(-1)^q f^{q-\mu} h(x) = \mathop{\mathrm{S}}_{k_{m-1}=0} \mathfrak{l}\, f_2^{k_m-2} f_3^{k_m-3} \ldots f_m^{k_0} g^{l_n} \mathfrak{g}_1^{l_n-1} \mathfrak{g}_2^{l_n-2} \ldots \mathfrak{g}_n^{l_0}\,,$$

wenn in der Summe bloß diejenigen Glieder mitgenommen werden, für welche k_{m-1} verschwindet.

Vergleicht man damit den früher gefundenen Ausdruck

$$h(x) = \mathrm{S}\,\mathfrak{l}\, f^{k_m} f_{\prime}^{k_m-1} f_{\prime\prime}^{k_m-2} \ldots f_{(m)}^{k_0} g^{l_n} g_{\prime}^{l_n-1} g_{\prime\prime}^{l_n-2} \ldots g_{(n)}^{l_0}\,,$$

so darf man den Satz aussprechen:

> **„wenn eine Kovariante h als Funktion der Differentialquotienten $f_{(i)} g_{(i)} \ldots$ gegeben ist, und man schreibt 1 statt f, 0 statt $f_{\prime}$ und im Übrigen f_i statt $f_{(i)}$, $\mathfrak{g}_i$ statt $g_{(i)}$, so erhält man den Wert von $(-1)^q f^{q-\mu} h(x)$ ausgedrückt durch die Größen f_i und $\mathfrak{g}_i$."**

Hier kann $hx = h0 = H$ auch eine simultane *Invariante* von f und g bedeuten. Für eine Kovariante g von f dagegen und $b_n = \mathrm{S}\,\mathfrak{n}\, a_0^{k_0} \ldots a_m^{k_m}$ wird einfacher

$$(-1)^p f^{p-\mu} g x = \mathop{\mathrm{S}}_{k_{m-1}=0} \mathfrak{n}\, f_2^{k_m-2} \ldots f_m^{k_0}\,,$$

neben

$$gx = \mathrm{S}\,\mathfrak{n}\, f^{k_m} f_{\prime}^{k_m-1} \ldots f_{(m)}^{k_0}\,,$$

sowie für eine Invariante $gx = g0 = G$ die entsprechende Gleichung gilt:

$$(-1)^{\frac{1}{2} m \mu} f^{\frac{1}{2}(m-2)\mu}\, G = \mathop{\mathrm{S}}_{k_{m-1}=0} \mathfrak{n}\, f_2^{k_m-1} f_3^{k_m-3} \ldots f_m^{k_0}\,.$$

Da für $f = (x+1)^m$ die Werte f_i verschwinden, so ergibt sich mit Ausnahme des Falles $gx = f^\mu$, für $a_i = 1$: $gx = 0$ nebst $b_k = 0$ oder $\mathrm{S}\,\mathfrak{k} = 0$, und analog erhält man für $a_i = b_i = 1$: $hx = c_k = 0$ nebst

$$\mathrm{S}\,\mathfrak{k} = 0\,.$$

Diese Gleichungen bilden die Ergänzung zu der früher gefundenen Formel $\mathrm{S}\,\mathfrak{l} = 0$ und gelten für beliebige Kovarianten und Invarianten mit Ausschluß von $hx = f^{\mu} g^{\nu}$.

Wir bemerken noch, daß in dem Hermite'schen Ausdruck für hx sich keine Glieder fortheben, denn der Grad auf beiden Seiten ist

$$l + m(q-\mu) = \varpi .$$

In der Tat ist f_i vom Grade $(m-2)i$, $\mathfrak{g}_i$ vom Grade $(m-2)i+n$, also

$$\begin{aligned}\varpi &= (m-2)\left(\mathrm{S}(m-i)k_i + \mathrm{S}(n-i)l_i\right) + n\,\mathrm{S}\,l_i \\ &= (m-2)q + n\nu = m(q-\mu) + l .\end{aligned}$$

Alle Kovarianten, für welche $q=\mu$, lassen sich folglich als *ganze* Funktionen der $m+n$ Größen $f_2 f_3 \ldots f_m g\, \mathfrak{g}_1 \ldots \mathfrak{g}_n$ darstellen. Nur für $h = f^{\mu}$ ist $q > \mu$, es bleiben also die Fälle $q < \mu$ zu betrachten. Für $f = 0$ ergibt sich alsdann unter Berücksichtigung der Werte von

$$f_i = -(i-1) f_i'^{\,i}, \qquad \mathfrak{g}_i = g f_i'^{\,i},$$

sowie unter Weglassung der Faktoren $(-1)^{\mu} g^{\nu} f_i'^{\,q}$, die Gleichung

$$0 = \mathop{\mathrm{S}}_{k_{m-1}=0} (-1)^{k_m} \mathfrak{l} (m-1)^{k_0} (m-2)^{k_1} \ldots 2^{k_{m-3}} .$$

15.

Der für die Kovariante hx gefundene Ausdruck durch f_i und $\mathfrak{g}_i$ zeigt, daß wie bereits Art. 13 angedeutet wurde, nicht mehr als $m+n+1$ (also abgesehen von f und g nur $m+n-1$) unabhängige Kovarianten existieren können, weil sich vermittelst derselben die $m+n+1$ Größen f_i und $\mathfrak{g}_i$ eliminieren lassen, wodurch eine algebraische Gleichung zwischen den Kovarianten hervorgeht. Der Hauptvorteil der von Hermite entdeckten Darstellung besteht nun darin, daß die Größen $f f_2 \ldots f_m g\, \mathfrak{g}_1 \ldots \mathfrak{g}_n$ sämtlich selbst Kovarianten sind, so daß mittelst der gegebenen Formel, der Definition des Art. 13 entsprechend, *jede* Kovariante und Invariante als *rationale* Funktion von $m+n+1$ *assoziierten Kovarianten* ausgedrückt wird. Zugleich sind diese assoziierten Kovarianten so beschaffen, daß die rationale Funktion aus einer *ganzen* Funktion mit dem Nenner $f^{q-\mu}$ besteht, der für $l = (m-2)\mu + n\nu$ von selbst wegfällt. Es versteht sich ferner, daß die rechte Seite der Hermite'schen Gleichung für ganz *beliebige* Werte von $\mathfrak{l}$, k_i und l_i eine Kovariante darstellt, wenigstens wenn die einzelnen Produkte des Summenausdrucks gleiches Gewicht und gleiche Dimension besitzen.

Um nachzuweisen, daß die Funktionen f_i und $\mathfrak{g}_i$ Kovarianten sind, wollen wir in den Gleichungen für $\varphi\xi$ und $\chi\xi$ x um Δx und ξ um $\Delta\xi$ wachsen lassen, wodurch

$$\varphi(\xi+\Delta\xi)=(\varrho+\delta_2\Delta\xi)^m f(x+\Delta x)\,,$$

$$\chi(\xi+\Delta\xi)=(\varrho+\delta_2\Delta\xi)^n g(x+\Delta x)\,,$$

nebst

$$\Delta\xi=\frac{\varrho^2\Delta x}{\varepsilon-\delta_2\varrho\Delta x} \quad \text{und} \quad \varrho+\delta_2\Delta\xi=\frac{\varepsilon\Delta\xi}{\varrho\Delta x}$$

hervorgeht. Setzt man hier

$$\Delta x=-\frac{f}{z+f_,}\,,$$

so erhält man wegen

$$\delta_2\varrho^{m-1}f+\varepsilon\varrho^{m-2}f_,=\varphi_,:$$

$$\Delta\xi=-\frac{\varphi}{\zeta+\varphi_,}\,,\qquad \zeta=\varepsilon\varrho^{m-2}z\,,$$

ferner

$$\left(\frac{\varepsilon\Delta\xi}{\varrho\Delta x}\right)^m f\left(x-\frac{f}{z+f_,}\right)=\varphi\left(\xi-\frac{\varphi}{\zeta+\varphi_,}\right),$$

oder

$$(\zeta+\varphi_,)^m\varphi\left(\xi-\frac{\varphi}{\zeta+\varphi_,}\right)=\varepsilon^m\varrho^{m(m-1)}(z+f_,)^m f\left(x-\frac{f}{z+f_,}\right)\,,$$

nebst

$$(\zeta+\varphi_,)^n\chi\left(\xi-\frac{\varphi}{\zeta+\varphi_,}\right)=\varepsilon^n\varrho^{n(m-1)}(z+f_,)^n g\left(x-\frac{f}{z+f_,}\right)\,.$$

Hier hängen auf der rechten Seite die ganzen Funktionen

$$(z+f_,)^m f\left(x-\frac{f}{z+f_,}\right)=F(xaz) \quad \text{und} \quad (z+f_,)^n g\left(x-\frac{f}{z+f_,}\right)=G(xaz)$$

ebenso von xaz ab, wie die linken Seiten von $\xi\alpha\zeta$.

Entwickelt man beide Seiten dieser Gleichungen nach den Potenzen von z resp. ζ, so findet man

$$\varphi\left(\zeta^m+\widehat{m}_2\varphi_2\zeta^{m-2}+\widehat{m}_3\varphi_3\zeta^{m-3}\ldots\right)=$$
$$=\varepsilon^m\varrho^{m(m-1)}f\left(z^m+\widehat{m}_2 f_2 z^{m-2}+\widehat{m}_3 f_3 z^{m-3}\ldots\right)\,,$$

$$\chi\zeta^n+\widehat{n}_1\chi_1\zeta^{n-1}+\widehat{n}_2\chi_2\zeta^{n-2}\ldots=$$
$$=\varepsilon^n\varrho^{n(m-1)}\left(gz^n+\widehat{n}_1\mathfrak{g}_1 z^{n-1}+\widehat{n}_2\mathfrak{g}_2 z^{n-2}\ldots\right)\,,$$

folglich

$$\varphi\varphi_i\zeta^{m-i}=\varepsilon^m\varrho^{m(m-1)}ff_i z^{m-i}\,,$$

$$\chi_i\zeta^{n-i}=\varepsilon^n\varrho^{n(m-1)}\mathfrak{g}_i z^{n-i}\,,$$

sowie

$$\varphi_i(\xi) = \varepsilon^i \varrho^{i(m-2)} f_i(x) = f_i(\xi\alpha) ,$$

$$\chi_i(\xi) = \varepsilon^i \varrho^{i(m-2)+n} \mathfrak{g}_i(x) = \mathfrak{g}_i(\xi\alpha) ,$$

d. h. f_i ist Kovariante vom Grade $i(m-2)$, Gewicht i, Dimension $\mu = i$ und $\mathfrak{g}_i$ ist simultane Kovariante vom Grade $i(m-2)+n$, Gewicht i, Dimensionen $\mu = i$, $\nu = 1$. Analoges würde von den assoziierten Kovarianten $\mathfrak{f}_i$ und g_i gelten.

16.

Als Beispiel für den Hermite'schen Satz wollen wir die Kovariante

$$[ff]_{2i} = 2\psi_{2i}$$

benutzen, welche für gerade Werte des Index $2i$ zwischen 2 und m den Grad $2m-4i$, die Dimension 2 und das Gewicht $2i$ besitzt. Die Gleichung

$$\psi_{2i} = ff_{(2i)} - \widehat{2i}_1 f_{\prime} f_{(2i-1)} + \widehat{2i}_2 f_{\prime\prime} f_{(2i-2)} \cdots + (-1)^i \frac{2i \cdot 2i-1 \ldots i+1}{1 \cdot 2 \ldots i} \tfrac{1}{2} f_{(i)} f_{(i)}$$

liefert sogleich wegen $q - \mu = 2i - 2$

$$f^{2i-2}\psi_{2i} = f_{2i} + \widehat{2i}_2 f_2 f_{2i-2} - \widehat{2i}_3 f_3 f_{2i-3} \cdots + (-1)^i \widehat{2i}_i \tfrac{1}{2} f_i f_i .$$

Schreibt man ferner

$$\psi_{2i+1} = 2[f\psi_{2i}] ,$$

so erhält man für ungerade Werte des Index $2i+1$ zwischen 3 und m eine Kovariante vom Grad $l = 3m - 4i - 2$, Dimension $\mu = 3$ und Gewicht $q = 2i + 1$. Da

$$\psi_{2i+1} = \frac{2}{m} f' \psi_{2i} - \frac{1}{m-2i} f \psi'_{2i} ,$$

und

$$\frac{1}{m-2i}\psi'_{2i} = ff_{(2i+1)} - (2i-1) f_{\prime} f_{(2i)} + \frac{2i \cdot 2i-3}{1 \cdot 2} f_{\prime\prime} f_{(2i-1)} - - \frac{2i \cdot 2i-1 \cdot 2i-5}{1 \cdot 2 \cdot 3} f_{\prime\prime\prime} f_{(2i-2)} \cdots + (-1)^i \frac{2i \cdot 2i-1 \ldots i+2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \ldots i} f_{(i)} f_{(i+1)} ,$$

so ergibt sich

$$f^{2i-2}\psi_{2i+1} = f_{2i+1} + \frac{2i \cdot 2i-3}{1 \cdot 2} f_2 f_{2i-1} - \frac{2i \cdot 2i-1 \cdot 2i-5}{1 \cdot 2 \cdot 3} f_3 f_{2i-2} \cdots + (-1)^i \frac{2i \cdot 2i-1 \ldots i+2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \ldots i} f_i f_{i+1} .$$

Wenn wir auf die Inkongruenz in der Indexbezeichnung der Funktionen $f_2 f_3 \dots f_m$ einerseits und $\psi_2 \psi_3 \dots \psi_m$ andererseits hinweisen, so dürfen wir ein etwaiges Mißverständnis wohl nicht befürchten. Im Übrigen hat man

$$\psi_2 = f_2 = f f_{\prime\prime} - f_\prime f_\prime\,, \qquad l = 2m - 4\,, \qquad \mu = q = 2\,,$$

$$\psi_3 = f_3 = - f^2 f_{\prime\prime\prime} + 3 f f_\prime f_{\prime\prime} - 2 f_\prime^3\,, \qquad l = 3m - 6\,, \qquad \mu = q = 3\,,$$

also

$$\psi_2(0) = a_m a_{m-2} - a_{m-1}^2\,,$$

$$\psi_3(0) = - a_m^2 a_{m-3} + 3 a_m a_{m-1} a_{m-2} - 2 a_{m-1}^3\,.$$

Für $m = 3$, also $fx = a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 + \cdots$ erhält man die Art. 5 angeführte Kovariante

$$g(\overset{2}{x}) = - \psi_2 = (a_1^2 - a_0 a_2) x^2 + (a_1 a_2 - a_0 a_3) x + (a_2^2 - a_1 a_3)\,,$$

nebst

$$\begin{aligned} h(\overset{3}{x}) = - \psi_3 = (3 a_0 a_1 a_2 - 2 a_1^3 - a_0^2 a_3) x^3 + 3 (2 a_0 a_2^2 - a_1^2 a_2 - a_0 a_1 a_3) x^2 + \\ + 3 (a_1 a_2^2 + a_0 a_2 a_3 - 2 a_1^2 a_3) x + (2 a_2^3 + a_0 a_3^2 - 3 a_1 a_2 a_3)\,, \end{aligned}$$

wo beziehungsweise

$$n = p = \mu = 2 \qquad \text{und} \qquad n = p = \mu = 3\,.$$

17.

Schon **Clebsch** und **Gundelfinger** haben bemerkt, daß die Kovarianten f_i und $\mathfrak{g}_i$ durch einfachere assoziierte Systeme ersetzt werden können. Als solche bieten sich an Stelle der f_i die ψ_i dar, denn wir sahen, daß ψ_i das Gewicht i und den Grad $\mu m - 2i$ besitzt, während für i gerade die Dimension $\mu = 2$ und für i ungerade $\mu = 3$ wird. Es sind also gegenüber f_i Grad und Dimension erniedrigt. Zugleich werden die f_i durch *ganze* Funktionen der ψ_i ausgedrückt. Denn da nach dem Früheren

$$\begin{aligned}
\psi_2 &= f_2\,, & \psi_3 &= f_3\,,\\
f^2 \psi_4 &= f_4 + 3 f_2 f_2\,, & f^2 \psi_5 &= f_5 + 2 f_2 f_3\,,\\
f^4 \psi_6 &= f_6 + 15 f_2 f_4 - 10 f_3 f_3\,, & &\\
f^4 \psi_7 &= f_7 + 9 f_2 f_5 - 5 f_3 f_4\,, & &\\
f^6 \psi_8 &= f_8 + 28 f_2 f_6 - 56 f_3 f_5 + 35 f_4 f_4\,, & &\\
f^6 \psi_9 &= f_9 + 20 f_2 f_7 - 28 f_3 f_6 + 14 f_4 f_5\,, & &\\
f^8 \psi_{10} &= f_{10} + 45 f_2 f_8 - 120 f_3 f_7 + 210 f_4 f_6 - 126 f_5 f_5\,, & &\\
f^8 \psi_{11} &= f_{11} + 35 f_2 f_9 - 75 f_3 f_8 + 90 f_4 f_7 - 42 f_5 f_6\,, & &
\end{aligned}$$

usw., so erhält man durch Auflösung dieser Gleichungen:

$$f_2 = \psi_2 , \qquad f_3 = \psi_3 ,$$

$$f_4 = f^2 \psi_4 - 3\psi_2^2 , \qquad f_5 = f^2 \psi_5 - 2\psi_2 \psi_3 ,$$

$$f_6 = f^4 \psi_6 - 15 f^2 \psi_2 \psi_4 + 10\psi_3^2 + 45\psi_2^3 ,$$

$$f_7 = f^4 \psi_7 - 9 f^2 \psi_2 \psi_5 + 5 f^2 \psi_3 \psi_4 + 3\psi_2^2 \psi_3 ,$$

$$f_8 = f^6 \psi_8 - 28 f^4 \psi_2 \psi_6 + 56 f^2 \psi_3 \psi_5 - 35 f^4 \psi_4^2 + 630 f^2 \psi_2^2 \psi_4 - \\ - 392 \psi_2 \psi_3^2 - 1575 \psi_2^4 ,$$

$$f_9 = f^6 \psi_9 - 20 f^4 \psi_2 \psi_7 + 28 f^4 \psi_3 \psi_6 - 14 f^4 \psi_4 \psi_5 + 222 f^2 \psi_2^2 \psi_5 - \\ - 492 f^2 \psi_2 \psi_3 \psi_4 + 280 \psi_3^3 + 1116 \psi_2^3 \psi_3 ,$$

usw.

Analog können die simultanen Kovarianten $\mathfrak{g}_i$ ersetzt werden durch die Überschiebungskovarianten bilinearer Dimension:

$$\omega_i = [fg]_i = (-1)^i \left(f g_{(i)} - \hat{i}_1 f_{\prime} g_{(i-1)} + \hat{i}_2 f_{\prime\prime} g_{(i-2)} \mp \cdots \right) ,$$

oder wegen

$$l = m + n - 2i , \quad \mu = \nu = 1 , \quad q = i :$$

$$f^{i-1} \omega_i = \mathfrak{g}_i + \hat{i}_2 f_2 \mathfrak{g}_{i-2} - \hat{i}_3 f_3 \mathfrak{g}_{i-3} \pm \cdots$$

Wir setzen voraus, daß i die Werte von 1 bis n annimmt, während $n \leqq m$ m nicht übersteigt. Für $m < n$ würde man

$$(-1)^q g^{q-\nu} h(x) = \underset{l_{n-1}=0}{\mathrm{S}} \mathrm{I}\, \mathfrak{f}^{k_m} \mathfrak{f}_1^{k_{m-1}} \ldots \mathfrak{f}_m^{k_0} g_2^{l_{n-2}} g_3^{l_{n-3}} \ldots g_n^{l_0}$$

zu bilden haben. Für $x = 0$ ergibt sich

$$\omega_i(0) = (-1)^i \left(a_m b_{n-i} - \hat{i}_1 a_{m-1} b_{n-i+1} + \hat{i}_2 a_{m-2} b_{n-i+2} \mp \cdots \right) ,$$

dagegen für $fx = 0$ und $i > 1$, wodurch $f_i = -(i-1) f_{\prime}^i$, $\mathfrak{g}_i = g f_{\prime}^i$:

$$0 = 1 - \hat{i}_2 + 2\hat{i}_3 - 3\hat{i}_4 \pm \cdots + (-1)^{i-1} \left((i-3)\hat{i}_2 - (i-2)\hat{i}_1 + (i-1) \right) ,$$

wie leicht direkt zu verifizieren.

Man erhält jetzt die Gleichungen

$$\omega_1 = \mathfrak{g}_1 , \qquad f\omega_2 = \mathfrak{g}_2 + f_2 g ,$$

$$f^2 \omega_3 = \mathfrak{g}_3 + 3 f_2 \mathfrak{g}_1 - f_3 g ,$$

$$f^3 \omega_4 = \mathfrak{g}_4 + 6 f_2 \mathfrak{g}_2 - 4 f_3 \mathfrak{g}_1 + f_4 g ,$$

$$f^4 \omega_5 = \mathfrak{g}_5 + 10 f_2 \mathfrak{g}_3 - 10 f_3 \mathfrak{g}_2 + 5 f_4 \mathfrak{g}_1 - f_5 g ,$$

usw., mithin nach Substitution der Werte von f_i:

$$\mathfrak{g}_1 = \omega_1\,, \qquad \mathfrak{g}_2 = f\omega_2 - g\psi_2\,,$$

$$\mathfrak{g}_3 = f^2\omega_3 - 3\psi_2\omega_1 + g\psi_3\,,$$

$$\mathfrak{g}_4 = f^3\omega_4 - 6f\psi_2\omega_2 + 4\psi_3\omega_1 - f^2 g\psi_4 + 9g\psi_2^2\,,$$

$$\mathfrak{g}_5 = f^4\omega_5 - 10f^2\psi_2\omega_3 + 10f\psi_3\omega_2 - 5f^2\psi_4\omega_1 + 45\psi_2^2\omega_1 + \\ + f^2 g\psi_5 - 22g\psi_2\psi_3\,,$$

usw.

18.

Wir haben bisher die Kovarianten hx als simultane Kovarianten der beiden Funktionen f und g betrachtet. Wenn eine simultane Kovariante eines Systems von noch mehr Formen gegeben ist, so lassen sich die bisherigen Entwickelungen ohne Schwierigkeit auf diesen Fall ausdehnen. Von besonderem Interesse ist dagegen der Fall $g = f$, in welchem abgesehen von f, die Funktionen $f_2 f_3 \ldots f_m$ oder $\psi_2 \psi_3 \ldots \psi_m$ das ganze System unabhängiger assoziierter Kovarianten umfassen.

Die im Art. 14 gefundene Gleichung

$$(z+f_i)^m f\left(x - \frac{f}{z+f_i}\right) = f\,(z^m + \widehat{m}_2 f_2 z^{m-2} + \widehat{m}_3 f_3 z^{m-3} + \cdots)$$

kann für

$$y = x - \frac{f}{z+f_i} \qquad \text{oder} \qquad z = \frac{f}{x-y} - f_i$$

geschrieben werden

$$f^{m-1} x f y = (x-y)^m (z^m + \widehat{m}_2 f_2 z^{m-2} + \cdots)\,.$$

Diese Gleichung zeigt, daß die ganzen Funktionen m-ten Grades

$$z^m + \widehat{m}_2 f_2 z^{m-2} + \cdots \qquad \text{und} \qquad f y = a_0 y^m + \cdots$$

gleichzeitig verschwinden, daß also die Wurzeln beider Funktionen im engsten Zusammenhange stehen: namentlich sind für reelle Werte von x die Wurzeln y und z gleichzeitig reell und komplex. Für $fy = 0$ wird

$$z = \frac{fx - fy}{x-y} - f_i$$

eine Wurzel der Gleichung

$$z^m + \widehat{m}_2 f_2 z^{m-2} + \widehat{m}_3 f_3 z^{m-3} + \cdots + f_m = 0\,,$$

in der die Variable x offenbar ganz beliebig gewählt, also auch gleich Null oder Unendlich gesetzt werden kann.

Für $x = 0$ wird z. B.

$$a_m^{m-1} f y = (-1)^m y^m (z^m + \widehat{m}_2 f_2^0 z^{m-2} + \widehat{m}_3 f_3^0 z^{m-3} \ldots),$$

wo

$$z = -a_{m-1} - \frac{a_m}{y}$$

und

$$f_i^0 = -(i-1) a_{m-1}^i + \widehat{i}_2 a_m a_{m-1}^{i-2} a_{m-2} \cdots + (-1)^i a_m^{i-1} a_{m-i}.$$

Analog ergibt sich für $x = \infty$, wenn man vorher durch $x^{m(m-1)}$ dividiert und

$$\frac{z}{x^{m-2}} = \zeta, \quad \text{sowie} \quad \frac{f_i}{x^{i(m-2)}} = \eta_i$$

setzt:

$$a_0^{m-1} f y = \zeta^m + \widehat{m}_2 \eta_2 \zeta^{m-2} + \widehat{m}_3 \eta_3 \zeta^{m-3} + \cdots,$$

und hier wird für wachsende Werte von x

$$\zeta = a_0 y + a_1,$$

während

$$\eta_i = a_0^{i-1} a_i - \widehat{i}_1 a_0^{i-2} a_1 a_{i-1} + \widehat{i}_2 a_0^{i-3} a_1^2 a_{i-2} \cdots$$
$$+ (-1)^i \left(\widehat{i}_2 a_0 a_1^{i-2} a_2 - (i-1) a_1^i\right)$$

den Koeffizienten der höchsten Potenz von x in f_i bedeutet.

Nach dem Früheren hat man ferner den Satz, daß *jede beliebige* Kovariante gx von f mit dem Gewicht p und der Dimension μ aus dem Werte

$$gx = F(f_{(m)} f_{(m-1)} \cdots f_i f) \quad \text{oder} \quad g0 = b_n = F(a_0 a_1 \ldots a_{m-1} a_m)$$

durch den Ausdruck hervorgeht

$$(-1)^p f^{p-\mu} g x = F(f_m f_{m-1} \cdots f_2\, 0\, 1).$$

Schreibt man

$$b_0 = (-1)^p F(a_m a_{m-1} \ldots a_1 a_0) = \mathfrak{F}(a_0 a_1 \ldots a_{m-1} a_m),$$

so kann man auch setzen

$$f^{p-\mu} g x = \mathfrak{F}(1\, 0\, f_2 \cdots f_{m-1} f_m),$$

wo die assoziierten Kovarianten f_i als Koeffizienten der sogenannten typischen Gleichung für $z = \frac{f}{x-y} - f_i$:

$$z^m + \widehat{m}_2 f_2 z^{m-2} + \widehat{m}_3 f_3 z^{m-3} + \cdots + f_m = 0$$

definiert sind. Diese zuerst wohl von Hermite in Betracht gezogene

Gleichung[1]) hat für $fy = 0$ die Wurzeln

$$z = (a_0 y + a_1) x^{m-2} + \left(a_0 y^2 + \widehat{m}_1 a_1 y + \widehat{m-1}_1 a_2\right) x^{m-3} +$$
$$+ \left(a_0 y^3 + \widehat{m}_1 a_1 y^2 + \widehat{m}_2 a_2 y + \widehat{m-1}_2 a_3\right) x^{m-4} + \cdots$$

bis $$+ \left(a_0 y^{m-2} + \widehat{m}_1 a_1 y^{m-3} \cdots + \widehat{m}_3 a_{m-3} y + \widehat{m-1}_2 a_{m-2}\right) x - a_{m-1} - \frac{a_m}{y},$$

nebst

$$a_0 y^{m-1} + \widehat{m}_1 a_1 y^{m-2} \cdots + \widehat{m}_2 a_{m-2} y + \widehat{m-1}_1 a_{m-1} = - a_{m-1} - \frac{a_m}{y},$$

$$a_0 y^{m-2} + \widehat{m}_1 a_1 y^{m-3} \cdots + \widehat{m}_3 a_{m-3} y + \widehat{m-1}_2 a_{m-2} =$$
$$= -\left((m-1) a_{m-2} + m \frac{a_{m-1}}{y} + \frac{a_m}{y^2}\right),$$

so daß für $x = y$, $z = (m-1) f_{\prime}(y)$ wird, während für *beliebige* Werte von x und y:

$$(x-y)z =$$
$$\left(a_0 x^{m-1} + \widehat{m-1}_1 a_1 x^{m-2} + \widehat{m-1}_2 a_2 x^{m-3} \cdots + \widehat{m-1}_1 a_{m-2} x + a_{m-1}\right) y +$$
$$+ \left(a_1 x^{m-1} + \widehat{m-1}_1 a_2 x^{m-2} + \widehat{m-1}_2 a_3 x^{m-3} \cdots + \widehat{m-1}_1 a_{m-1} x + a_m\right).$$

---

1) *Crelle's Journal* Bd. 52, S. 27.

II. Anwendungen auf die Theorie der algebraischen Gleichungen.

19.

Im Folgenden soll das Verhalten der typischen Gleichung für die Werte $m = 2, 3, 4, 5, 6$ näher untersucht werden.[1]) Vorher mag noch die Bemerkung Platz finden, daß die assoziierten Kovarianten f_i auch durch die Potenzsummen der Wurzeln der Gleichung

$$z^m + \widehat{m}_2 f_2 z^{m-2} + \widehat{m}_3 f_3 z^{m-3} \cdots + f_m = 0$$

ersetzt werden können. Denn führt man mittelst bekannter Formeln die Größen $\sigma_k = S_i z_i^k$ ein, so hat man wegen $\sigma_1 = 0$ zu setzen:

$$\widehat{m}_2 f_2 = -\frac{1}{2}\sigma_2\,, \qquad \widehat{m}_3 f_3 = -\frac{1}{3}\sigma_3\,,$$

$$\widehat{m}_4 f_4 = -\frac{1}{4}\sigma_4 + \frac{1}{8}\sigma_2^2\,, \qquad \widehat{m}_5 f_5 = -\frac{1}{5}\sigma_5 + \frac{1}{6}\sigma_2\sigma_3\,,$$

$$\widehat{m}_6 f_6 = -\frac{1}{6}\sigma_6 + \frac{1}{8}\sigma_2\sigma_4 + \frac{1}{18}\sigma_3^2 - \frac{1}{48}\sigma_2^3\,,$$

$$\widehat{m}_7 f_7 = -\frac{1}{7}\sigma_7 + \frac{1}{10}\sigma_2\sigma_5 + \frac{1}{12}\sigma_3\sigma_4 - \frac{1}{24}\sigma_2^2\sigma_3\,,$$

$$\widehat{m}_8 f_8 = -\frac{1}{8}\sigma_8 + \frac{1}{12}\sigma_2\sigma_6 + \frac{1}{15}\sigma_3\sigma_5 + \frac{1}{32}\sigma_4^2 - \frac{1}{32}\sigma_2^2\sigma_4 - \frac{1}{36}\sigma_2\sigma_3^2 + \frac{1}{384}\sigma_2^4\,,$$

$$\widehat{m}_9 f_9 = -\frac{1}{9}\sigma_9 + \frac{1}{14}\sigma_2\sigma_7 + \frac{1}{18}\sigma_3\sigma_6 + \frac{1}{20}\sigma_4\sigma_5 - \frac{1}{40}\sigma_2^2\sigma_5 -$$

$$- \frac{1}{24}\sigma_2\sigma_3\sigma_4 - \frac{1}{162}\sigma_3^3 + \frac{1}{144}\sigma_2^3\sigma_3\,,$$

. . . .

Die Summe der Koeffizienten in den Ausdrücken für $\widehat{m}_i f_i$ beträgt

$$\frac{1}{i!} - \frac{1}{(i-1)!}\,.$$

---

1) Hier sind namentlich die zahlreichen Arbeiten von Cayley und Brioschi zu vergleichen, insbesondere das *Fifth Memoir upon Quantics* in den *Philos. Transact.* von 1858.

Schreibt man aber $\alpha_i = -\widehat{m}_i f_i$, so erhält man

$$\sigma_2 = 2\,\alpha_2\,, \qquad \sigma_3 = 3\,\alpha_3\,,$$

$$\sigma_4 = 4\left(\alpha_4 + \frac{1}{2}\,\alpha_2^2\right), \qquad \sigma_5 = 5\,(\alpha_5 + \alpha_2\alpha_3)\,,$$

$$\sigma_6 = 6\left(\alpha_6 + \alpha_2\alpha_4 + \frac{1}{2}\,\alpha_3^2 + \frac{1}{3}\,\alpha_2^3\right),$$

$$\sigma_7 = 7\left(\alpha_7 + \alpha_2\alpha_5 + \alpha_3\alpha_4 + \alpha_2^2\alpha_3\right),$$

$$\sigma_8 = 8\left(\alpha_8 + \alpha_2\alpha_6 + \alpha_3\alpha_5 + \frac{1}{2}\,\alpha_4^2 + \alpha_2^2\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3^2 + \frac{1}{4}\,\alpha_2^4\right),$$

$$\sigma_9 = 9\left(\alpha_9 + \alpha_2\alpha_7 + \alpha_3\alpha_6 + \alpha_4\alpha_5 + \alpha_2^2\alpha_5 + 2\,\alpha_2\alpha_3\alpha_4 + \frac{1}{3}\,\alpha_3^3 + \alpha_2^3\alpha_3\right),$$

. . . .

Die quadratischen Gleichungen.

Für $m = 2$ und die quadratische Funktion

$$fx = Ax^2 + 2\,Bx + C = A\,(x - x_0)\,(x - x_1)$$

wird

$$fx\,fy = (x - y)^2\,(z^2 + f_2)\,,$$

$$f_2 = ff_{\prime\prime} - f_\prime f_\prime = \frac{1}{2}\,[ff]_2 = AC - B^2\,,$$

$$(x - y)\,z = Axy + B\,(x + y) + C\,.$$

Folglich erhält man für $y = x_k$ die typische Gleichung

$$z^2 + f_2 = z^2 - \frac{1}{2}\,\sigma_2 = 0\,,$$

wo $f_2 = -\varDelta$ die Diskriminante des Art. 6 darstellt. Mithin ist

$$\varDelta = B^2 - AC = \frac{1}{4}\,A^2(x_0 - x_1)^2 = \frac{1}{2}\,(z_0^2 + z_1^2)$$

nicht allein eine Invariante vom Gewicht und der Dimension 2, sondern es folgt auch

$$z^2 = \varDelta = \frac{1}{2}\,\sigma_2 \qquad \text{oder} \qquad z = \pm\sqrt{\varDelta}\,.$$

Da aber

$$z = Ay + B = -B - \frac{C}{y}\,,$$

also für beliebige Multiplikatoren α und β:

$$(\alpha - \beta y)z = (\alpha A + \beta B)y + \alpha B + \beta C\,,$$

so ergibt sich

$$y = \frac{\alpha z - \alpha B - \beta C}{\beta z + \alpha A + \beta B} \qquad \text{oder} \qquad x_k = \frac{\pm\alpha\sqrt{\varDelta} - \alpha B - \beta C}{\pm\beta\sqrt{\varDelta} + \alpha A + \beta B}\,.$$

Für α oder $\beta = 0$ hat man demnach

$$x_0 = \frac{\sqrt{\Delta} - B}{A} = \frac{-C}{\sqrt{\Delta} + B} \quad \text{und} \quad x_1 = \frac{-\sqrt{\Delta} - B}{A} = \frac{C}{\sqrt{\Delta} - B},$$

$$A(x_0 + x_1) = -2B, \qquad A(x_0 - x_1) = 2\sqrt{\Delta},$$

während zugleich

$$(x - x_k)z = Axx_k + B(x + x_k) + C,$$

$$\Delta \cdot f = A(Axx_0 + B\overline{x + x_0} + C)(Axx_1 + B\overline{x + x_1} + C).$$

20.

Die kubischen Gleichungen.

$$m = 3.$$

Der *kubischen* Funktion

$$fx = Ax^3 + 3Bx^2 + 3Cx + D = A(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

sind die Kovarianten $f_2 x$ und $f_3 x$ assoziiert, welche bereits Art. 16 in der Form

$$g = -f_2 = A_1 x^2 + 2B_1 x + C_1 = -\frac{1}{2}[ff]_2$$

$$A_1 = B^2 - AC, \qquad 2B_1 = BC - AD, \qquad C_1 = C^2 - BD,$$

$$h = -f_3 = i_0 x^3 + 3i_1 x^2 + 3i_2 x + i_3 = 2[fg]$$

$$i_0 = 3ABC - A^2D - 2B^3, \qquad i_1 = 2AC^2 - ABD - B^2C,$$

$$i_2 = ACD - 2B^2D + BC^2, \qquad i_3 = AD^2 - 3BCD + 2C^3$$

entwickelt worden sind, und deren Grad, Gewicht und Dimension gleiche Werte haben. Zugleich wird $g^2 = \frac{1}{2}[fh]$.

Nach Art. 10 muß die Invariante von g

$$J = 4(B_1^2 - A_1C_1) = (BC - AD)^2 - 4(B^2 - AC)(C^2 - BD)$$
$$= A^2D^2 - 6ABCD + 4AC^3 + 4B^3D - 3B^2C^2 = -2[gg]_2$$

auch als Invariante zu f gehören. Diese stimmt mit der Diskriminante $D_3(f)$ des Art. 6 überein und hat das Gewicht $p = 6$ und die Dimension $\mu = 4$, so daß nach unseren früheren Sätzen für

$$J = F(ABCD), \qquad f^2 J = F(1\,0\,f_2 f_3),$$

$$f^2 J = f_3^2 + 4f_2^3 = h^2 - 4g^3$$

erhalten wird. Zugleich ergeben sich durch Vergleichung der Potenzen von x die Relationen

$$A^2J = i_0^2 - 4A_1^3, \qquad ABJ = i_0 i_1 - 2A_1^2 B_1,$$
$$D^2J = i_3^2 - 4C_1^3, \qquad CDJ = i_2 i_3 - 2B_1 C_1^2,$$
$$(2AC + 3B^2)J = 2i_0 i_2 + 3i_1 i_1 - 4A_1(A_1C_1 + 4B_1^2),$$
$$(2BD + 3C^2)J = 2i_1 i_3 + 3i_2 i_2 - 4C_1(A_1C_1 + 4B_1^2),$$
$$(AD + 9BC)J = i_0 i_3 + 9i_1 i_2 - 4B_1(3A_1C_1 + 2B_1^2),$$
$$J = Ai_3 - 2Bi_2 + Ci_1 = -Bi_2 + 2Ci_1 - Di_0,$$
$$Ai_3 + Di_0 = Bi_2 + Ci_1.$$

Man kann auch die beiden f_2 und f_3 entsprechenden Kovarianten $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ von h bilden, indem man die Koeffizienten $AB\ldots$ durch $i_0 i_1 \ldots$ ersetzt. Dann ergibt eine leichte Rechnung

$$\mathfrak{g} = -Jg, \qquad \mathfrak{h} = -J^2 f,$$

so daß man auch auf diesem Wege die Invariante J hätte ableiten können. Außerdem findet man die zugehörige Invariante

$$\mathfrak{J} = J^3,$$

wie schon Eisenstein im 27. Bande des *Crelle*'schen Journals (*Über eine merkwürdige identische Gleichung*, S. 105) anführt.

Die für f^2J gefundene Gleichung kann in der Form geschrieben werden:

$$g^3 = \frac{1}{4}(h^2 - f^2J) = \frac{h + f\sqrt{J}}{2} \cdot \frac{h - f\sqrt{J}}{2}.$$

Daraus folgt, daß die beiden Faktoren $\frac{1}{2}(h \pm f\sqrt{J})$ dritten Potenzen linearer Ausdrücke gleich sein müssen, weil ein gemeinsamer Faktor beider f, g und h teilen müßte. Setzt man also

$$h + f\sqrt{J} = 2(ax + b)^3, \qquad h - f\sqrt{J} = 2(a'x + b')^3,$$

so wird

$$g = (ax + b)(a'x + b') = A_1x^2 + 2B_1x + C_1,$$

mithin

$$aa' = A_1, \qquad ab' + a'b = 2B_1, \qquad bb' = C_1,$$

nebst

$$2a^3 = i_0 + A\sqrt{J}, \qquad 2a'^3 = i_0 - A\sqrt{J},$$
$$2a^2b = i_1 + B\sqrt{J}, \qquad 2a'^2b' = i_1 - B\sqrt{J},$$

$$2ab^2 = i_2 + C\sqrt{J}, \qquad 2a'b'^2 = i_2 - C\sqrt{J},$$
$$2b^3 = i_3 + D\sqrt{J}, \qquad 2b'^3 = i_3 - D\sqrt{J},$$

und wie man leicht verifiziert:

$$ab' - ba' = \sqrt{J} \quad \text{oder} \quad ab' = B_1 + \frac{1}{2}\sqrt{J}, \quad a'b = B_1 - \frac{1}{2}\sqrt{J}.$$

Es ist nun leicht, die Wurzeln der kubischen Gleichungen $f = 0$ und $h = 0$, sowie der typischen Gleichung für z anzugeben. Denn da

$$f\sqrt{J} = (ax+b)^3 - (a'x+b')^3 \quad \text{und} \quad h = (ax+b)^3 + (a'x+b')^3,$$

so erhält man für $f(y) = 0$ und $\varrho^3 = 1$:

$$ay + b = \varrho(a'y + b') \quad \text{oder} \quad (a - a'\varrho)y = -(b - b'\varrho),$$

sowie für $h(y') = 0$:

$$ay' + b = -\varrho(a'y' + b') \quad \text{oder} \quad (a + a'\varrho)y' = -(b + b'\varrho).$$

Schreibt man aber

$$j = e^{\frac{\pi i}{3}} = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}),$$

so haben die Einheitswurzeln ϱ die Werte 1, $-j$ und $-\frac{1}{j} = j^2$, so daß für $y = x_k$:

$$x_0 = -\frac{b-b'}{a-a'}, \qquad x_1 = -\frac{b+b'j}{a+a'j}, \qquad x_2 = -\frac{b'+bj}{a'+aj},$$

während für $y' = x_k'$:

$$x_0' = -\frac{b+b'}{a+a'}, \qquad x_1' = -\frac{b-b'j}{a-a'j}, \qquad x_2' = -\frac{b'-bj}{a'-aj}.$$

Für reelle Werte der Koeffizienten in f sind die Wurzeln y und y' nur reell bei negativer Diskriminante J. Denn für $J < 0$ nehmen a und a', sowie b und b' konjugierte Werte an, so daß nicht allein x_0 und x_0', sondern auch

$$x_1 = -\frac{(b+b'j)\left(a+\frac{a'}{j}\right)}{(a+a'j)\left(a+\frac{a'}{j}\right)} = -\frac{ab+a'b'+ab'j+a'b\frac{1}{j}}{a^2+aa'+a'^2}$$

nebst x_2, sowie x_1' und x_2' reell werden. Für $J > 0$ dagegen sind $a\,b\,a'b'$ reell, und neben der reellen Wurzel x_0 resp. x_0' die beiden $x_1 x_2$ resp. $x_1' x_2'$ konjugiert. Die Wurzeln

$$-\frac{b}{a} = \frac{-2B_1 + \sqrt{J}}{2A_1} \quad \text{und} \quad -\frac{b'}{a'} = \frac{-2B_1 - \sqrt{J}}{2A_1}$$

der quadratischen Gleichung $g = 0$ verhalten sich natürlich umgekehrt und sind reell für $J > 0$, konjugiert für $J < 0$.

21.

Wir wenden uns jetzt zur direkten Auflösung der *typischen* Gleichung

$$z^3 = 3gz + h = \frac{1}{2}\sigma_2 z + \frac{1}{3}\sigma_3 ,$$

also

$$\sigma_2 = 6g , \qquad \sigma_3 = 3h .$$

Zufolge des Art. 18 hat man für $z = \frac{f}{x-y} - f_1$:

$$(x-y)z = (Ax^2 + 2Bx + C)y + (Bx^2 + 2Cx + D) ,$$

$$f^2 x f y = (x-y)^3 (z^3 - 3gz - h) = (x-y)^3 (z - z_0)(z - z_1)(z - z_2) ,$$

und hieraus folgt für $y = x_k$:

$$z^3 = 3gz + h ,$$

$$z = (Ay + B)x - C - \frac{D}{y} = (Ay + B)x + Ay^2 + 3By + 2C .$$

Schreibt man hier $z = u + v$, so wird

$$(u+v)^3 = u^3 + v^3 - 3uv(u+v) = 3g(u+v) + h ,$$

und man kann die beiden Größen u und v durch die Gleichungen

$$u^3 + v^3 = h \qquad \text{und} \qquad uv = g$$

bestimmen. Da aber $h^2 - 4g^3 = f^2 J$, so ergibt sich weiter

$$u^3 - v^3 = f\sqrt{J}$$

und damit

$$u^3 = \frac{1}{2}\left(h + f\sqrt{J}\right) = (ax+b)^3 , \qquad v^3 = \frac{1}{2}\left(h - f\sqrt{J}\right) = (a'x + b')^3 ,$$

$$z = \varrho(ax+b) + \varrho'(a'x+b') = u + v .$$

Da wir aber $g = (ax+b)(a'x+b') = uv$ gesetzt haben, so folgt $\varrho\varrho' = 1$ und

$$z = \varrho(ax+b) + \varrho^2(a'x+b') = (a\varrho + a'\varrho^2)x + (b\varrho + b'\varrho^2) .$$

Die Wurzeln der typischen Gleichung nehmen also jetzt die Gestalt an:

$$z_0 = (a+a')x + b + b' , \qquad z_1 = (a'j^2 - aj)x + (b'j^2 - bj) ,$$

$$z_2 = (aj^2 - a'j)x + (bj^2 - b'j) , \quad \text{folglich} \quad z_0 + z_1 + z_2 = 0 ,$$

$$z_0 + z_1 j^2 - z_2 j = 3(ax+b) , \qquad z_0 - z_1 j + z_2 j^2 = 3(a'x+b') .$$

Durch Quadrierung findet man leicht den Wert

$$z^2 - 2g = g + \frac{h}{z} = \varrho^2(ax+b)^2 + \varrho(a'x+b')^2 .$$

Vergleicht man ferner den Ausdruck

$$z = (Ay + B)x - C - \frac{D}{y},$$

und läßt y unendlich zu- oder abnehmen, so folgt

$$Ay + B = \zeta = (a + a'\varrho)\varrho \qquad \text{oder} \qquad C + \frac{D}{y} = -(b + b'\varrho)\varrho,$$

woraus neue einfache Ausdrücke für die Wurzeln $y = x_k$ gewonnen werden. Man erhält sogleich, eventuell mit beliebigen Multiplikatoren α und β:

$$x_0 = \frac{a + a' - B}{A} = -\frac{D}{b + b' + C} = \frac{\alpha(a + a') - \alpha B - \beta D}{\beta(b + b') + \alpha A + \beta C},$$

$$x_1 = -\frac{aj - a'j^2 + B}{A} = \frac{D}{bj - b'j^2 - C} = \frac{\alpha j(a - a'j) + \alpha B + \beta D}{\beta j(b - b'j) - \alpha A - \beta C},$$

$$x_2 = \frac{aj^2 - a'j - B}{A} = -\frac{D}{bj^2 - b'j + C} = \frac{\alpha j(a' - aj) + \alpha B + \beta D}{\beta j(b' - bj) - \alpha A - \beta C},^{1)}$$

nebst den Ausdrücken für die Lagrange'sche Resolvente:

$$A(x_0 + x_1 + x_2) = -3B,$$

$$A(x_0 + x_1 j^2 - x_2 j) = 3a,$$

$$A(x_0 - x_1 j + x_2 j^2) = 3a'.$$

Den vorstehenden Gleichungen gehen die weiteren Formeln parallel:

$$D\left(\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) = -3C = -A(x_1x_2 + x_2x_0 + x_0x_1),$$

$$D\left(\frac{1}{x_0} + \frac{j^2}{x_1} - \frac{j}{x_2}\right) = -3b = -A(x_1x_2 + j^2x_2x_0 - jx_0x_1),$$

$$D\left(\frac{1}{x_0} - \frac{j}{x_1} + \frac{j^2}{x_2}\right) = -3b' = -A(x_1x_2 - jx_2x_0 + j^2x_0x_1),$$

während die Invariante durch

$$J = D_3(f) = -\frac{1}{27}A^4(x_1 - x_2)^2(x_2 - x_0)^2(x_0 - x_1)^2,$$

und die Kovarianten durch

$$g = \frac{1}{18}A^2((x_1 - x_2)^2(x - x_0)^2 + (x_2 - x_0)^2(x - x_1)^2 + (x_0 - x_1)^2(x - x_2)^2),$$

$$h = \frac{1}{27}A^3\sum_6 (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)^2(x - x_1)^2(x - x_2),$$

---

1) Zur Verifikation der Gleichung $\frac{b' - b}{a - a'} = \frac{a + a' - B}{A}$ dienen die Formeln

$$A(ab' - a'b) = a^3 - a'^3 = A\sqrt{J},$$

$$B(ab' - a'b) = a^2b - a'^2b' = B\sqrt{J}.$$

als Funktionen der Wurzeln gegeben sind, wobei die symmetrische Summe $\sum$ aus *sechs* Gliedern besteht.[1]) Die Diskriminante der typischen Gleichung wird $f^2 J$, die Kovarianten g und h aber gehen über in

$$gz^2 + hz + g^2 \qquad \text{und} \qquad hz^3 + 6g^2z^2 + 3ghz + h^2 - 2g^3.$$

Dabei hat man $ax + b$ durch

$$(ax + b)z + (a'x + b')^2)\varrho\,,$$

und $a'x + b'$ durch

$$(a'x + b')z + (ax + b)^2)\varrho$$

zu ersetzen.

Die Werte von x_k und x_k' stehen in direktem Zusammenhang. Denn wenn die Wurzel z für $x = y'$ verschwindet, so erhält man

$$y' = \frac{C + \frac{D}{y}}{Ay + B}\,,$$

und da vermöge der typischen Gleichung h gleichzeitig verschwinden muß, so wird

$$h = i_0 \prod_y (x - y') = i_0 \prod_y \left(x - \frac{C + \frac{D}{y}}{Ay + B}\right) = i_0 \prod_y \left(x + y + 2\,\frac{By + C}{Ay + B}\right)\cdot$$

Auf diesem Wege gehen durch Einführung der verschiedenen für $y = x_k$ gefundenen Ausdrücke die entsprechenden Formeln für $y' = x_k'$ hervor, analog wie man die Wurzeln $z_k = (Ax_k + B)x - C - \frac{D}{x_k}$ aus den Werten x_k ableiten könnte. Indessen gelangt man zu einfacheren Ausdrücken für x_k' durch die folgenden Betrachtungen.

22.

Es ist nicht ohne Interesse, die allgemeinere Gleichung

$$\mathfrak{w} f - h = \mathfrak{A}(x - \mathfrak{x}_0)(x - \mathfrak{x}_1)(x - \mathfrak{x}_2) = \mathfrak{f} = 0\,,$$

mit dem Differential

$$d\mathfrak{f} = f\,d\mathfrak{w} + \frac{6g^2}{f}\,dx = 0$$

---

[1]) Für die Koeffizienten i_k in h gelten die ähnlichen Summen:

$$i_0 = \frac{1}{27}A^3 \sum_6 (x_0^3 - 3x_0^2x_1 + 2x_0x_1x_2)\,,$$

$$i_1 = \frac{1}{27}A^3 \sum_6 (2x_0^2x_1^2 - x_0^2x_1x_2 - x_0^3x_1)\,,$$

$$i_2 = \frac{1}{27}A^3 \sum_6 (2x_0^3x_1x_2 - x_0^3x_1^2 - x_0^2x_1^2x_2)\,,$$

$$i_3 = \frac{1}{27}A^3 \sum_6 (x_0^3x_1^3 - 3x_0^3x_1^2x_2 + 2x_0^2x_1^2x_2^2)\,.$$

aufzulösen, wenn w eine beliebige Variable bedeutet. Man braucht dazu in dem Ausdruck für f nur

$$\mathfrak{A} = Aw - i_0\,, \quad \mathfrak{B} = Bw - i_1\,, \quad \mathfrak{C} = Cw - i_2\,, \quad \mathfrak{D} = Dw - i_3\,,$$

an Stelle der Koeffizienten $ABCD$ zu setzen, wodurch

$$\mathfrak{A}_1 = A_1(w^2 - J)\,, \quad \mathfrak{B}_1 = B_1(w^2 - J)\,, \quad \mathfrak{C}_1 = C_1(w^2 - J)$$

hervorgehen, und die entsprechenden Werte der Kovarianten

$$\mathfrak{f} = wf - h\,, \quad \mathfrak{g} = g(w^2 - J)\,, \quad \mathfrak{h} = (wh - fJ)(w^2 - J)\,,$$

nebst der Diskriminante $\mathfrak{J} = J(w^2 - J)^2$ erhalten werden. Dann ist nicht allein

$$\mathfrak{J}\mathfrak{f}^2 = \mathfrak{h}^2 - 4\mathfrak{g}^3,$$

sondern auch

$$\mathfrak{h} + \mathfrak{f}\sqrt{\mathfrak{J}} = 2(\mathfrak{a}x + \mathfrak{b})^3 = 2(ax + b)^3(w^2 - J)\left(w - \sqrt{J}\right),$$

$$\mathfrak{h} - \mathfrak{f}\sqrt{\mathfrak{J}} = 2(\mathfrak{a}'x + \mathfrak{b}')^3 = 2(a'x + b')^3(w^2 - J)\left(w + \sqrt{J}\right),$$

und für

$$\mu^3 = (w^2 - J)\left(w - \sqrt{J}\right), \qquad \mu'^3 = (w^2 - J)\left(w + \sqrt{J}\right):$$

$$\mathfrak{a} = \mu a\,, \quad \mathfrak{b} = \mu b\,, \quad \mathfrak{a}' = \mu' a'\,, \quad \mathfrak{b}' = \mu' b'.$$

Neben

$$x_k = -\frac{b - b'\varrho}{a - a'\varrho} \quad \text{und} \quad x_k' = -\frac{b + b'\varrho}{a + a'\varrho}$$

wird jetzt

$$\mathfrak{x}_k = -\frac{\mathfrak{b} - \mathfrak{b}'\varrho}{\mathfrak{a} - \mathfrak{a}'\varrho} = -\frac{\mu b - \mu' b'\varrho}{\mu a - \mu' a'\varrho}\,,$$

so daß für $w = \infty$, $\mu = \mu'$, $\mathfrak{x}_k$ in x_k, und für $w = 0$, $\mu = \sqrt{J}$, $\mu' = -\sqrt{J}$, $\mathfrak{x}_k$ in x_k' übergeht. Den Gleichungen endlich für $f(y) = 0$:

$$Ay + B = (a + a'\varrho)\varrho \quad \text{und} \quad C + \frac{D}{y} = -(b + b'\varrho)\varrho$$

entsprechen für $\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) = 0$ oder $h = wf$ die Werte

$$(Aw - i_0)\mathfrak{x} + (Bw - i_1) = (\mu a + \mu' a'\varrho)\varrho\,,$$

und

$$Cw - i_2 + \frac{Dw - i_3}{\mathfrak{x}} = -(\mu b + \mu' b'\varrho)\varrho\,,$$

oder

$$\mathfrak{x}_k = \frac{(\mu a + \mu' a'\varrho)\varrho - Bw + i_1}{Aw - i_0} = -\frac{Dw - i_3}{(\mu b + \mu' b'\varrho)\varrho + Cw - i_2}\,.$$

Für $w = 0$ erhält man daraus die Wurzeln von h in der Form:

$$x_k' = -\frac{i_1 + (a - a'\varrho)\varrho\sqrt{J}}{i_0} = -\frac{i_3}{i_2 - (b - b'\varrho)\varrho\sqrt{J}}\,.$$

23.

Die biquadratischen Gleichungen.

$m = 4$.

Die assoziierten Kovarianten der biquadratischen Funktion

$$fx = Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4Dx + E = A(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

sind gegeben durch die Ausdrücke vierten und sechsten Grades

$$g = -\psi_2 = f_{\prime}f_{\prime} - ff_{\prime\prime} = -\frac{1}{2}[ff]_2$$
$$= A_1x^4 + 4B_1x^3 + 6C_1x^2 + 4D_1x + E_1\,,$$

$$A_1 = B^2 - AC\,,\quad 2B_1 = BC - AD\,,\quad E_1 = D^2 - CE\,,\quad 2D_1 = CD - BE\,,\qquad 6C_1 = 3C^2 - 2BD - AE\,,$$

und

$$h = -\psi_3 = 2(f_{\prime}g - fg_{\prime}) = 2[fg]\,,$$
$$= i_0x^6 + 6i_1x^5 + 15i_2x^4 + 20i_3x^3 + 15i_4x^2 + 6i_5x + i_6\,,$$

$$i_0 = 2(AB_1 - BA_1) = 3ABC - A^2D - 2B^3,$$
$$i_1 = AC_1 - CA_1\,,\qquad 6i_1 = 9AC^2 - A^2E - 2ABD - 6B^2C\,,$$
$$i_2 = 2(BC_1 - CB_1)\,,\qquad 3i_2 = 2(AD_1 - DA_1) = 3ACD - ABE - 2B^2D\,,$$
$$i_3 = BD_1 - DB_1\,,\qquad 2i_3 = AE_1 - EA_1 = AD^2 - B^2E\,,$$
$$i_4 = 2(CD_1 - DC_1)\,,\qquad 3i_4 = 2(BE_1 - EB_1) = ADE - 3BCE + 2BD^2\,,$$
$$i_5 = CE_1 - EC_1\,,\qquad 6i_5 = AE^2 + 2BDE + 6CD^2 - 9C^2E\,,$$
$$i_6 = 2(DE_1 - ED_1) = BE^2 - 3CDE + 2D^3,$$

nebst der *Invariante* der Art. 6 und 10:

$$G = \psi_4 = AE - 4BD + 3CC = \frac{1}{2}[ff]_4\,.$$

Da ψ_i vom Gewicht i, so ist für g, h und G das Gewicht $p = 2, 3, 4$. Wir bemerken noch die häufig anwendbaren Formeln

$$3C_1 = BD - AE + \frac{1}{2}G\,,\qquad 4C_1 = C^2 - AE + \frac{1}{3}G\,,\qquad C_1 = C^2 - BD - \frac{1}{6}G\,,$$

so wie

$$4i_1i_3 = i_0i_4 + 3i_2i_2\,,\qquad 9i_2i_4 = i_0i_6 + 8i_3i_3\,,$$
$$4i_3i_5 = i_2i_6 + 3i_4i_4\,,\qquad 2Ci_3 = Ai_5 + Ei_1 = Bi_4 + Di_2\,.$$

Man kann nun, indem man die Koeffizienten $AB\ldots$ durch $A_1 B_1 \ldots$ ersetzt, die entsprechenden Kovarianten $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{G}$ aus g bilden, und erhält durch direkte Rechnung die Werte

$$\mathfrak{g} = -\frac{1}{12}(Gg + 3Hf), \qquad \mathfrak{h} = \frac{1}{4} Hh, \qquad \mathfrak{G} = \frac{1}{12} G^2$$

mit den zugehörigen Gewichten 6, 9 und 8, während zur Abkürzung geschrieben ist:

$$H = ACE + 2BCD - AD^2 - B^2E - C^3 = -\frac{1}{8}[fg]_4 .$$

Diese bereits im Art. 6 betrachtete Größe aber ist als Quotient der Kovarianten $\frac{4\mathfrak{h}}{h}$, neben G selbst eine *zweite Invariante* von f mit dem Gewicht 6. Die Invarianten G und H, deren Ausdrücke bereits Eisenstein, Boole und Cayley gefunden haben, werden bekanntlich von Weierstraß durch g_2 und g_3 bezeichnet. Will man auch die Invariante $\mathfrak{H}$ berechnen, so geht der Wert hervor:

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{216}(G^3 - 54H^2) = \frac{1}{54}\prod(G - 6\lambda^2) .$$

Wir wollen noch einen Augenblick die Kovariante

$j_4 = fH + gG$ vom Grade 4, Dimension 4 und Gewicht 6

betrachten, deren höchstes Glied durch $-Jx^4$ gegeben ist, wo

$$J = -AH - A_1 G .$$

Nach dem Hermite'schen Satze für $f^{p-\mu} gx$ folgt

$$f^2 j_4 = -4f_2^3 - f_3^2 \qquad \text{oder} \qquad 4g^3 - h^2 = f^2(fH + gG) .$$

Dieselbe wichtige Formel ergibt sich für $gx = H$, wodurch

$$f^3 H = f_2 f_4 - f_2^3 - f_3^2 = f^2 \psi_2 \psi_4 - 4\psi_2^3 - \psi_3^2$$
$$= 4g^3 - h^2 - f^2 gG ,$$
$$h^2 = 4g^3 - Ggf^2 - Hf^3 = 4(g - \lambda_0 f)(g - \lambda_1 f)(g - \lambda_2 f) ,$$
$$i_0^2 = 4A_1^3 - A^2 A_1 G - A^3 H = 4(A_1 - A\lambda_0)(A_1 - A\lambda_1)(A_1 - A\lambda_2) .$$

Hier werden $\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2$ die Wurzeln der sogenannten kubischen Resolvente

$$4\lambda^3 = G\lambda + H.$$ [1]

1) Man kann diese Gleichung auch in der Form der Determinante

$$\begin{vmatrix} A & B & C-2\lambda \\ B & C+\lambda & D \\ C-2\lambda & D & E \end{vmatrix} = 0, \quad \text{nebst} \quad H = \begin{vmatrix} A & B & C \\ B & C & D \\ C & D & E \end{vmatrix}$$

schreiben, wie Aronhold (*Crelle's Journal* Bd. 52, S. 95) bemerkt hat. Die kubische Resolvente findet sich bereits bei Strehlke (*Crelle* Bd. 12, S. 358).

Man schließt daraus, daß in dem Ausdruck

$$h = 2\sqrt{g-\lambda_0 f}\cdot\sqrt{g-\lambda_1 f}\cdot\sqrt{g-\lambda_2 f}$$

die drei Radikale

$$\sqrt{g-\lambda f} = Px^2 + 2Qx + R$$

rationale Funktionen von x sein müssen.

Hier wird

$$\begin{aligned} A_1 - A\lambda &= P^2, & B_1 - B\lambda &= PQ, \\ E_1 - E\lambda &= R^2, & D_1 - D\lambda &= QR, \end{aligned} \qquad 3(C_1 - C\lambda) = 2Q^2 + PR.$$

Nun ist aber identisch

$$(BC - AD - 2B\lambda)^2 = (B^2 - A(C+\lambda))\left((C-2\lambda)^2 - AE\right) + A(4\lambda^3 - G\lambda - H),$$

also

$$4(B_1 - B\lambda)^2 = (A_1 - A\lambda)\left((C-2\lambda)^2 - AE\right),$$

oder

$$4Q^2 = (C-2\lambda)^2 - AE.$$

Damit folgt weiter

$$PR = C^2 - BD - \lambda(C + 2\lambda),$$

und wenn man von der Gleichung

$$4C_1 = C^2 - AE + \frac{1}{3}G$$

Gebrauch macht:

$$Q^2 = C_1 - C\lambda + \lambda^2 - \frac{1}{12}G, \qquad PR = C_1 - C\lambda - 2\lambda^2 + \frac{1}{6}G,$$

so daß

$$Q^2 - PR = 3\lambda^2 - \frac{1}{4}G.$$

Es versteht sich übrigens von selbst, daß die Vorzeichen der Radikale PQ und R insoweit unbestimmt sind, als sie *gleichseitig* umgekehrt werden dürfen, damit die Produkte QR, PR und PQ ungeändert bleiben. Auch beweist man leicht das Stattfinden der drei linearen Relationen

$$\begin{aligned} 0 &= (C-2\lambda)P - 2BQ + AR, \\ 0 &= DP - 2(C+\lambda)Q + BR, \\ 0 &= EP - 2DQ + (C-2\lambda)R, \end{aligned}$$

welche durch Multiplikation mit PQR verifiziert werden können.

24.

Die Auflösung der Gleichungen $f=0$ und $h=0$ ergibt sich jetzt ohne Schwierigkeit. Denn da neben

$$g - \lambda f = (Px^2 + 2Qx + R)^2,$$

wenn λ' und λ'' die übrigen Wurzeln der Resolvente bezeichnen, auch

$$g - \lambda' f = (P'x^2 + 2Q'x + R')^2 \quad \text{und} \quad g - \lambda'' f = (P''x^2 + 2Q''x + R'')^2,$$

so folgt sogleich

$$\begin{aligned}(\lambda'' - \lambda')f &= (P'x^2 + 2Q'x + R')^2 - (P''x^2 + 2Q''x + R'')^2 \\ &= \big((P' - P'')x^2 + 2(Q' - Q'')x + R' - R''\big) \times \\ &\qquad \times \big((P' + P'')x^2 + 2(Q' + Q'')x + R' + R''\big),\end{aligned}$$

und durch Auflösung quadratischer Gleichungen:

$$(P' - P'')x = \pm S - Q' + Q'' \quad \text{und} \quad (P' + P'')x = \pm T - Q' - Q'',$$

wo

$$S^2 = (Q' - Q'')^2 - (P' - P'')(R' - R''),$$
$$T^2 = (Q' + Q'')^2 - (P' + P'')(R' + R'')$$

gesetzt ist.[1]) Dadurch sind die vier Wurzeln der biquadratischen Funktion fx bestimmt.

Selbstverständlich gehen die den Vertauschungen der Wurzeln $\lambda \lambda' \lambda''$ entsprechenden Zerlegungen parallel:

$$\begin{aligned}(\lambda - \lambda'')f &= \big((P'' - P)x^2 + 2(Q'' - Q)x + R'' - R\big) \times \\ &\qquad \times \big((P'' + P)x^2 + 2(Q'' + Q)x + R'' + R\big),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\lambda' - \lambda)f &= \big((P - P')x^2 + 2(Q - Q')x + R - R'\big) \times \\ &\qquad \times \big((P + P')x^2 + 2(Q + Q')x + R + R'\big),\end{aligned}$$

für welche die Wurzelausdrücke zu bilden sind:

$$(P'' - P)x = \pm S' - Q'' + Q, \qquad (P'' + P)x = \pm T' - Q'' - Q,$$
$$S'^2 = (Q'' - Q)^2 - (P'' - P)(R'' - R),$$
$$T'^2 = (Q'' + Q)^2 - (P'' + P)(R'' + R),$$

und

$$(P - P')x = \pm S'' - Q + Q', \qquad (P + P')x = \pm T'' - Q - Q',$$
$$S''^2 = (Q - Q')^2 - (P - P')(R - R'),$$
$$T''^2 = (Q + Q')^2 - (P + P')(R + R').$$

---

1) Übrigens wird sich herausstellen, daß die Größen S und T nicht voneinander verschieden sind.

Der Wert

$$h = 2\sqrt{(g-\lambda f)(g-\lambda' f)(g-\lambda'' f)} = 2\prod(Px^2 + 2Qx + R)$$

aber liefert, wenn

$$Q^2 - PR = 3\lambda^2 - \frac{1}{4}G = \frac{1}{4}\mu^2$$

geschrieben wird:

$$x = \frac{\mu - 2Q}{2P} = \frac{-2R}{\mu + 2Q} = \frac{\alpha\mu - 2\alpha Q - 2\beta R}{\beta\mu + 2\alpha P + 2\beta Q},$$

und da die den drei Wurzeln $\lambda\lambda'\lambda''$ entsprechenden Größen $P^2 Q^2 R^2 \mu^2$ je drei Werte annehmen, während die Radikale $PQR\mu$ doppelte Vorzeichen besitzen, so sind dadurch die sechs Wurzeln x von h vollständig bestimmt.

Es ist von Interesse die oben abgeleiteten Zerfällungen von fx in quadratische Faktoren mit einigen weiteren Zerlegungen zu vergleichen, die sich auf folgendem Wege ergeben. Wir schreiben $fx = \xi\xi$ mit den beiden Faktoren zweiten Grades

$$\xi_1\xi_1 = l_1 x^2 + 2m_1 x + n_1 \quad \text{und} \quad \xi_2\xi_2 = l_2 x^2 + 2m_2 x + n_2,$$

wodurch

$$A = l_1 l_2, \quad 2B = l_1 m_2 + l_2 m_1, \quad E = n_1 n_2, \quad 2D = m_1 n_2 + m_2 n_1, \quad 6C = 4m_1 m_2 + l_1 n_2 + l_2 n_1.$$

Setzt man ferner

$$L = Ax^2 + 2Bx + C, \qquad M = Bx^2 + 2Cx + D, \qquad N = Cx^2 + 2Dx + E,$$

so folgt

$$f = Lx^2 + 2Mx + N, \qquad f_{,} = Lx + M \quad \text{und} \quad f_{,,} = L.$$

Die Kovarianten g und h aber nehmen die Form an

$$g = \frac{1}{12}\xi^2(\xi'\xi' - 2\xi\xi'') = M^2 - LN = L_1 x^2 + 2M_1 x + N_1,$$

$$h = \frac{1}{12}\xi^5\xi''' = 2\left((LM_1 - L_1 M)x^2 + (LN_1 - L_1 N)x + MN_1 - M_1 N\right),$$

wo $L_1 M_1 N_1$ ebenso von $A_1 B_1 \ldots$ abhängen, wie LMN von $AB\ldots$

Schreibt man jetzt

$$A\xi_1\xi_1 = a\left(Ax^2 + 2(B-P)x + C - 2\lambda - 2Q\right),$$

$$a\xi_2\xi_2 = \left(Ax^2 + 2(B+P)x + C - 2\lambda + 2Q\right),$$

wo a einen beliebigen Faktor bedeutet, so ergeben sich die Bedingungsgleichungen:

$$3AC = A(C-2\lambda) + 2(B^2 - P^2)$$
$$AD = B(C-2\lambda) - 2PQ,$$
$$AE = (C-2\lambda)^2 - 4Q^2.$$

Diese Gleichungen liefern nicht allein genau die früher abgeleiteten Werte von P^2Q^2 und PQ, sondern geben auch durch Elimination von P und Q die kubische Resolvente für λ. Mithin dürfen wir setzen:

$$l_1 = a, \quad Am_1 = a(B-P), \quad An_1 = a(C-2\lambda-2Q),$$
$$al_2 = A, \quad am_2 = B+P, \quad an_2 = C-2\lambda+2Q.$$

Aus diesen Werten gehen sogleich die Ausdrücke hervor:

$$m_1m_2 = C+\lambda, \quad l_1m_2 - l_2m_1 = 2P, \quad l_1n_2 - l_2n_1 = 4Q,$$
$$l_1n_2 + l_2n_1 = 2(C-2\lambda), \quad 6\lambda = 2m_1m_2 - l_1n_2 - l_2n_1,$$
$$A(m_1n_2 - m_2n_1) = 4BQ - 2(C-2\lambda)P, \quad \text{oder} \quad m_1n_2 - m_2n_1 = 2R.$$

Damit erhält man auch

$$\pm\sqrt{g-\lambda f} = Px^2 + 2Qx + R =$$
$$= \frac{1}{2}\Big((l_1x+m_1)(m_2x+n_2) - (l_2x+m_2)(m_1x+n_1)\Big) =$$
$$= \frac{1}{2}\Big((l_1m_2 - l_2m_1)x^2 + (l_1n_2 - l_2n_1)x + m_1n_2 - m_2n_1\Big).$$

Man kann ferner die Zerlegung von fx in der Form herbeiführen:

$$(C+\lambda)\xi_1\xi_1 = a'\Big((B+P)x^2 + 2(C+\lambda)x + D - R\Big),$$
$$a'\xi_2\xi_2 = \Big((B-P)x^2 + 2(C+\lambda)x + D + R\Big),$$

oder

$$(C+\lambda)l_1 = a'(B+P), \quad m_1 = a', \quad (C+\lambda)n_1 = a'(D-R),$$
$$a'l_2 = B-P, \quad a'm_2 = C+\lambda, \quad a'n_2 = D+R,$$

nebst

$$Aa' = a(B-P), \quad (C+\lambda)(l_1n_2 + l_2n_1) = 2(BD+PR),$$
$$AR = 2BQ - (C-2\lambda)P \quad \text{und} \quad 2(C+\lambda)Q = BR + DP.$$

Endlich wird auch

$$E\xi_1\xi_1 = a''\Big((C-2\lambda+2Q)x^2 + 2(D+R)x + E\Big),$$
$$a''\xi_2\xi_2 = \Big((C-2\lambda-2Q)x^2 + 2(D-R)x + E\Big),$$

oder

$$El_1 = a''(C-2\lambda+2Q), \quad Em_1 = a''(D+R), \quad n_1 = a'',$$
$$a''l_2 = C-2\lambda-2Q, \quad a''m_2 = D-R, \quad a''n_2 = E,$$

nebst

$$Ea' = a''(D+R), \quad EP = 2DQ - (C-2\lambda)R.$$

25.

Wenn man von der gegenseitigen Vertauschung der Faktoren ξ_1 und ξ_2 absieht, gibt es offenbar nur drei mögliche Zerlegungen $fx = \xi_1^2\xi_2^2$, welche den drei Wurzeln der kubischen Resolvente entsprechen. Um die im Vorstehenden gefundenen Zerfällungen miteinander zu vergleichen, setzen wir[1])

$$(\lambda'' - \lambda')\xi_1\xi_1 = b\left((P' - P'')x^2 + 2(Q' - Q'')x + R' - R''\right),$$

$$b\xi_2\xi_2 = (P' + P'')x^2 + 2(Q' + Q'')x + R' + R'',$$

mithin

$$(\lambda'' - \lambda')l_1 = b(P' - P''), \qquad (\lambda'' - \lambda')m_1 = b(Q' - Q''),$$

$$(\lambda'' - \lambda')n_1 = b(R' - R''),$$

$$bl_2 = P' + P'', \quad bm_2 = Q' + Q'', \quad bn_2 = R' + R'',$$

nebst

$$(\lambda'' - \lambda')(l_1 m_2 - l_2 m_1) = (P' - P'')(Q' + Q'') - (P' + P'')(Q' - Q''),$$

oder

$$(\lambda'' - \lambda')P = P'Q'' - P''Q',$$

sowie

$$2(\lambda'' - \lambda')Q = P'R'' - P''R', \qquad (\lambda'' - \lambda')R = Q'R'' - Q''R'.$$

Dann erhält man die Relationen:

$$b(P' - P'') = (\lambda'' - \lambda')a = (\lambda'' - \lambda')a'\frac{B + P}{C - \lambda} = (\lambda'' - \lambda')a''\frac{C - 2\lambda + 2Q}{E},$$

$$a(P' + P'') = Ab, \qquad a'(P' + P'') = (B - P)b,$$

$$a''(P' + P'') = (C - 2\lambda - 2Q)b.$$

$$b(Q' - Q'') = (\lambda'' - \lambda')a\frac{B - P}{C - \lambda} = (\lambda'' - \lambda')a' = (\lambda'' - \lambda')a''\frac{D + R}{E},$$

$$a(Q' + Q'') = (B + P)b, \qquad a'(Q' + Q'') = (C - \lambda)b,$$

$$a''(Q' + Q'') = (D - R)b.$$

$$b(R' - R'') = (\lambda'' - \lambda')a\frac{C - 2\lambda - 2Q}{A} = (\lambda'' - \lambda')a'\frac{D - R}{C - \lambda} = (\lambda'' - \lambda')a'',$$

$$a(R' + R'') = (C - 2\lambda + 2Q)b, \qquad a'(R' + R'') = (D - R)b.$$

$$a''(R' + R'') = Eb.$$

[1]) Würde man $(\lambda - \lambda')\xi_1\xi_1$ oder $(\lambda'' - \lambda)\xi_2\xi_2$ schreiben, so würde man auf Widersprüche geführt werden.

Die Elimination der Faktoren $a\,a'a''b$ ergibt:

$$P'-P'':Q'-Q'':R'-R''=A:B-P:C-2\lambda-2Q=$$
$$=B+P:C+\lambda:D-R=C-2\lambda+2Q:D+R:E,$$

$$P'+P'':Q'+Q'':R'+R''=A:B+P:C-2\lambda+2Q=$$
$$=B-P:C+\lambda:D+R=C-2\lambda-2Q:D-R:E.$$

Die zyklische Vertauschung von $\lambda\lambda'\lambda''$ aber liefert:

$$P''-P:Q''-Q:R''-R=A:B-P':C-2\lambda'-2Q'=$$
$$=B+P':C+\lambda':D-R'=C-2\lambda'+2Q':D+R':E,$$

$$P''+P:Q''+Q:R''+R=A:B+P':C-2\lambda'+2Q'=$$
$$=B-P':C+\lambda':D+R'=C-2\lambda'-2Q':D-R':E.$$

$$P-P':Q-Q':R-R'=A:B-P'':C-2\lambda''-2Q''=$$
$$=B+P'':C+\lambda'':D-R''=C-2\lambda''+2Q'':D+R'':E,$$

$$P+P':Q+Q':R+R'=A:B+P'':C-2\lambda''+2Q''=$$
$$=B-P'':C+\lambda'':D+R''=C-2\lambda''-2Q'':D-R'':E.$$

Aus diesen Proportionen lassen sich eine größere Anzahl von Gleichungen zwischen $P\,Q\,R\,P'\,Q'R'\,P''\,Q''R''$ ableiten. So folgt aus

$$A(Q\mp Q')=(B\mp P'')(P\mp P') \quad \text{und} \quad E(Q\mp Q')=(D\pm R'')(R\mp R'),$$

$$P'P''=AQ-BP, \qquad R'R''=DR-EQ,$$
$$P''P=AQ'-BP', \qquad R''R=DR'-EQ',$$
$$PP'=AQ''-BP'', \qquad RR'=DR''-EQ''.$$

Ferner erhält man die Werte

$$2\,Q'Q''=BR-DP=P'R''+P''R',$$
$$2\,Q''Q=BR'-DP'=P''R+PR'',$$
$$2\,Q\,Q'=BR''-DP''=PR'+P'R,$$

und wenn man die gefundenen Gleichungen resp. mit PRQ multipliziert:

$$P\,P'P''=AB_1-BA_1=\tfrac{1}{2}i_0,$$
$$R\,R'R''=DE_1-ED_1=\tfrac{1}{2}i_6,$$
$$2\,Q\,Q'Q''=BD_1-DB_1=i_3.$$

Auch wird

$$P'R'' = (\lambda'' - \lambda')Q + Q'Q'', \qquad P''R' = (\lambda' - \lambda'')Q + Q'Q'',$$

$$P''R = (\lambda - \lambda'')Q' + Q''Q, \qquad PR'' = (\lambda'' - \lambda)Q' + Q''Q,$$

$$PR' = (\lambda' - \lambda)Q'' + QQ', \qquad P'R = (\lambda - \lambda')Q'' + QQ',$$

nebst

$$P'Q'' = (\lambda'' - \lambda')P + P''Q', \qquad Q''R' = (\lambda' - \lambda'')R + Q'R'',$$

$$P''Q = (\lambda - \lambda'')P' + PQ'', \qquad QR'' = (\lambda'' - \lambda)R' + Q''R,$$

$$PQ' = (\lambda' - \lambda)P'' + P'Q, \qquad Q'R = (\lambda - \lambda')R'' + QR'.$$

26.

Wir können jetzt den Wurzeln $y = x_1$ der Gleichung $fy = 0$ eine einfachere Form geben, wenn wir

$$x_1 = \frac{\alpha s - \alpha m - \beta n}{\beta s - \alpha l - \beta m}, \qquad s^2 = m^2 - ln$$

setzen, wo α, β und das Vorzeichen des Radikals s beliebig gewählt werden dürfen. Untersucht man die verschiedenen Zerlegungen von fx, so ergibt sich

[illegible] usw.

[illegible]

[illegible]

[illegible] wegen

[illegible]

3) für $l_1 = a' \frac{B+P}{C+\lambda}$, $l_2 = \frac{1}{a'}(B-P)$, usw.

$$s_1^2 = \left(\frac{a'}{C+\lambda}\right)^2 \left((C+\lambda)^2 - (B+P)(D-R)\right) = \left(\frac{a'}{C+\lambda}\right)^2 (Q'+Q'')^2,$$

$$s_2^2 = \frac{1}{a'^2}\left((C+\lambda)^2 - (B-P)(D+R)\right) = \frac{1}{a'^2}(Q'-Q'')^2,$$

$$s_1^2 s_2^2 = G - 3\lambda^2 = \left(\frac{Q'^2 - Q''^2}{C+\lambda}\right)^2 = (\lambda' - \lambda'')^2.$$

4) für $l_1 = a'' \frac{C-2\lambda+2Q}{E}$, $l_2 = \frac{1}{a''}(C - 2\lambda - 2Q)$, usw.

$$s_1^2 = \left(\frac{a''}{E}\right)^2 \left((D+R)^2 - E(C-2\lambda+2Q)\right) = \left(\frac{a''}{E}\right)^2 (R'+R'')^2,$$

$$s_2^2 = \frac{1}{a''^2}\left((D-R)^2 - E(C-2\lambda-2Q)\right) = \frac{1}{a''^2}(R'-R'')^2,$$

$$s_1^2 s_2^2 = \frac{1}{E^2}(R'^2 - R''^2)^2 = (\lambda' - \lambda'')^2.$$

Aus dem Vorstehenden entspringen die Wurzelausdrücke

$$(P' - P'')y = \pm(\lambda' - \lambda'') - Q' + Q'',$$

$$(P' + P'')y = \pm(\lambda' - \lambda'') - Q' - Q'';$$

$$Ay = -B + P \pm (P' + P''),$$

$$Ay = -B - P \pm (P' - P'');$$

$$(B+P)y = -C - \lambda \pm (Q' + Q''),$$

$$(B-P)y = -C - \lambda \pm (Q' - Q'');$$

$$(C - 2\lambda + 2Q)y = -D - R \pm (R' + R''),$$

$$(C - 2\lambda - 2Q)y = -D + R \pm (R' - R'');$$

oder

$$\frac{R' - R''}{y} = \mp(\lambda' - \lambda'') - Q' + Q'',$$

$$\frac{R' + R''}{y} = \mp(\lambda' - \lambda'') - Q' - Q'';$$

$$\frac{C - 2\lambda - 2Q}{y} = -B + P \mp (P' + P''),$$

$$\frac{C - 2\lambda + 2Q}{y} = -B - P \mp (P' - P'');$$

$$\frac{D - R}{y} = -C - \lambda \mp (Q' + Q'),$$

$$\frac{D + R}{y} = -C - \lambda \mp (Q' - Q'');$$

$$\frac{E}{y} = -D - R \mp (R' + R''),$$

$$\frac{E}{y} = -D + R \mp (R' - R'').$$

Durch zyklische Vertauschung von $\lambda\lambda'\lambda''$ resp. $PP'P''$, $QQ'Q''$ und $RR'R''$ gehen selbstverständlich weitere analoge Ausdrücke für die Wurzeln y hervor, von deren Hinschreiben wir jedoch absehen dürfen.

Da die Radikale PQR durch ihre Quadrate gegeben sind, während nicht bloß die Produkte QR, RP und PQ, sondern auch die Werte von

$$PP'P'' = \frac{1}{2}i_0, \qquad QQ'Q'' = \frac{1}{2}i_3, \qquad RR'R'' = i_6$$

rational bleiben, so darf man gleichzeitig die Vorzeichen von je zweien unter ihnen umkehren und erhält dadurch aus einer Wurzel x_k die drei übrigen, z. B.

$$Ax_0 + B = P + P' + P'', \qquad Ax_1 + B = P - P' - P'',$$

$$Ax_2 + B = -P + P' - P'', \qquad Ax_3 + B = -P - P' + P'',$$

sowie entsprechend bei den übrigen Formeln.

Bildet man die Produkte

$$(v - P^2)(v - P'^2)(v - P''^2),$$

$$(v - Q^2)(v - Q'^2)(v - Q''^2) \quad \text{und} \quad (v - R^2)(v - R'^2)(v - R''^2),$$

so folgen zur Bestimmung von $P^2 Q^2 R^2$ die kubischen Gleichungen

$$\prod(v - P^2) = v^3 - 3A_1 v^2 + \frac{3}{2}(Ai_1 - Bi_0)v - \frac{1}{4}i_0^2 = 0,$$

$$\prod(v - Q^2) = v^3 - 3\left(C_1 + \frac{1}{12}G\right)v^2 + \frac{3}{4}(Bi_4 - Di_2)v - \frac{1}{4}i_3^2 = 0,$$

$$\prod(v - R^2) = v^3 - 3E_1 v^2 + \frac{3}{2}(Di_6 - Ei_5)v - \frac{1}{4}i_6^2 = 0,$$

wie man leicht durch direkte Rechnung findet. Ebenso erhält man

$$\prod(w - PQ) = w^3 - 3B_1 w^2 + \frac{1}{2}(Ai_3 - Di_0)w - \frac{1}{4}i_0 i_3,$$

$$\prod(w - PR) = w^3 - 3\left(C_1 - \frac{1}{6}G\right)w^2 + \frac{3}{2}[Ai_5 - Bi_4 = Di_2 - Ei_1]\,w - \frac{1}{4}i_0 i_6,$$

$$\prod(w - QR) = w^3 - 3D_1 w^2 + \frac{1}{2}(Bi_6 - Ei_3)w - \frac{1}{4}i_3 i_6.$$

Die Wurzeln der Gleichung $g(y') = 0$ ergeben sich auf folgendem Weg. Im Art. 23 hatten wir beim Übergang von f zu g die Kovarianten

$$\mathfrak{g} = -\frac{1}{12}(Gg + 3Hf), \qquad \mathfrak{h} = \frac{1}{4}Hh,$$

und die Invarianten $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ abgeleitet, wodurch die Diskriminante

$$\mathfrak{G}^3 - 27\,\mathfrak{H}^2 = \frac{1}{16}\,H^2(G^3 - 27\,H^2)$$

hervorgeht. Bezeichnet man die entsprechende kubische Resolvente durch

$$4\,\lambda_g^3 = \mathfrak{G}\,\lambda_g + \mathfrak{H}\,,$$

so überzeugt man sich ohne Schwierigkeit, daß

$$\lambda_g = \frac{1}{6}\,G - \lambda^2\,.\text{[1]}$$

Damit erhält man dem Ausdruck $g - \lambda f$ entsprechend

$$\mathfrak{g} - \lambda_g\,g = \lambda'\,\lambda''(g - \lambda f)\,,$$

so daß beim Übergang von f zu g der Faktor $\lambda'\,\lambda''$ zu $g - \lambda f$ hinzutritt. Mithin geht auch $A_1 - A\lambda = P^2$ über in $\lambda'\,\lambda''\,P^2$ und

$$A_1 y' + B_1 = \mathrm{S} \pm \sqrt{\lambda'\,\lambda''\,(A_1 - A\lambda)}\,,$$

wenn das Produkt der in der Summe enthaltenen Radikale mit Hi_0 im Vorzeichen übereinstimmt.

27.

Um jetzt zur biquadratischen *typischen* Gleichung überzugehen, deren Koeffizienten die assoziierten Kovarianten von f sind, setzen wir für

$$z = \frac{f}{x-y} - f_1:$$

$$(x-y)z = (Ax^3 + 3Bx^2 + 3Cx + D)y + (Bx^3 + 3Cx^2 + 3Dx + E)\,,$$

nebst

$$f^3 xfy = (x-y)^4(z^4 + 6f_2 z^2 + 4f_3 z + f_4) = (x-y)^4 \prod_i (z - z_i)\,,$$

oder da

$$f_4 = f^2\psi_4 - 3\psi_2^2 = Gf^2 - 3g^2\,,$$

$$f^3 x f y = (x-y)^4(z^4 - 6gz^2 - 4hz - 3g^2 + Gf^2)\,.$$

Für $fy = 0$ folgt hieraus die typische Gleichung:

$$z^4 = 6gz^2 + 4hz + 3g^2 - Gf^2,$$

$$= \frac{1}{2}\,\sigma_2 z^2 + \frac{1}{3}\,\sigma_3 z + \frac{1}{4}\left(\sigma_4 - \frac{1}{2}\,\sigma_2^2\right)\,,$$

also

$$\sigma_2 = 12g\,, \qquad \sigma_3 = 12h, \qquad \sigma_4 = 4(21g^2 - Gf^2)\,,$$

[1]) In meiner Abhandlung *Zur Reduktion elliptischer Integrale*, S. 67 ist im Werte von $\mu = \lambda_g = -\frac{1}{3}(\lambda^2 + 2\lambda_1\lambda_2)$ der Faktor 2 irrtümlich ausgefallen.

nebst

$$z = (Ay + B)x^2 + (Ay^2 + 4By + 3C)x - D - \frac{E}{y}\,.$$

Die Invarianten G und H gehen über in Gf^2 und Hf^3, die Wurzel λ in λf, während gleichzeitig

$$Px^2 + 2Qx + R = \sqrt{g - \lambda f} \qquad \text{durch} \qquad z^2 + \frac{hz}{g - \lambda f} + g + 2\lambda f$$

zu multiplizieren ist.

Zur Auflösung dieser Gleichung schreiben wir

$$z = u_0 + u_1 + u_2 = \mathrm{S}\,u\,,$$

$$w = u_1 u_2 + u_2 u_0 + u_0 u_1 = \mathrm{S}\,u u_1\,,$$

und erhalten

$$z^2 = 2w + \mathrm{S}\,u^2\,, \qquad w^2 = 2u_0 u_1 u_2 z + \mathrm{S}\,u^2 u_1^2\,,$$

sowie durch fernere Quadrierung:

$$z^4 = 8u_0 u_1 u_2 z + 4\,\mathrm{S}\,u^2 u_1^2 + 4w\,\mathrm{S}\,u^2 + \mathrm{S}\,u^2\,\mathrm{S}\,u^2\,.$$

Vergleicht man damit den Ausdruck

$$6gz^2 + 4hz + 3g^2 - Gf^2 = 12gw + 4hz + 6g\,\mathrm{S}\,u^2 + 3g^2 - Gf^2\,,$$

so erkennt man leicht, daß beide Werte identisch werden, wenn man

$$h = 2u_0 u_1 u_2, \qquad 3g = \mathrm{S}\,u^2\,,$$

und

$$3g^2 - \frac{1}{4}\,Gf^2 = \mathrm{S}\,u^2 u_1^2\,,$$

also auch

$$\frac{1}{4}\,h^2 = u_0^2 u_1^2 u_2^2$$

setzt. Hieraus folgt, daß für $u^2 = v$ die kubische Gleichung

$$v^3 - 3gv^2 + 3\left(g^2 - \frac{1}{12}f^2 G\right)v - \frac{1}{4}\,h^2 = 0$$

die Wurzeln u_0^2, u_1^2 und u_2^2 liefert.

Diese Gleichung aber geht durch die Substitution $v = g - \lambda f$ nach leichter Reduktion in die kubische Resolvente

$$4\lambda^3 = G\lambda + H$$

über, so daß als die gesuchten Wurzelwerte sich die Ausdrücke ergeben:

$$u^2 = g - \lambda f = (Px^2 + 2Qx + R)^2 \quad \text{und} \quad z = \mathrm{S}\sqrt{g - \lambda f}\,;$$

die Vorzeichen der Radikale müssen dabei der Gleichung

$$\sqrt{g - \lambda f} \cdot \sqrt{g - \lambda' f} \cdot \sqrt{g - \lambda'' f} = \frac{1}{2}\,h$$

entsprechen, wodurch die vier Wurzeln $z_0 z_1 z_2 z_3$ völlig bestimmt sind.

Schreibt man wie Art. 18 $z = x^2\zeta$ und läßt x unendlich wachsen, so folgt

$$\zeta^4 = 6A_1\zeta^2 + 4i_0\zeta + 3A_1^2 - A^2G\ ,$$

nebst

$$\zeta = Ay + B = \mathrm{S}\sqrt{A_1 - A\lambda} = \mathrm{S}P\ .$$

Dieser Ausdruck endlich liefert wegen $y = x_k$ die Wurzeln $x_0 x_1 x_2 x_3$ der Funktion fx, wenn die Vorzeichen der Radikale der Gleichung

$$\sqrt{A_1 - A\lambda}\cdot\sqrt{A_1 - A\lambda'}\cdot\sqrt{A_1 - A\lambda''} = PP'P'' = \frac{1}{2}i_0$$

genügen. Man sieht, daß ähnlich wie bei den kubischen Gleichungen, die Benutzung der typischen Gleichung auf direktem Wege zur einfachsten Form der Wurzeln der biquadratischen Funktion führt.

Die für $v = g - \lambda f$ gefundene Gleichung liefert

$$\prod(v - g + \lambda f) = v^3 - 3gv^2 + 3\left(g^2 - \frac{1}{12}f^2G\right)v - \frac{1}{4}h^2\ ,$$

und wenn man die Koeffizienten der höchsten Potenzen von x vergleicht:

$$\prod(v - P^2) = v^3 - 3A_1v^2 + 3\left(A_1^2 - \frac{1}{12}A^2G\right)v - \frac{1}{4}i_0^2\ ,$$

während für $x = 0$:

$$\prod(v - R^2) = v^3 - 3E_1v^2 + 3\left(E_1^2 - \frac{1}{12}E^2G\right)v - \frac{1}{4}i_6^2\ .$$

Die Formel

$$g^2 - \frac{1}{12}Gf^2 = \frac{1}{2}[fh] = \frac{1}{2}(f_{,}h - fh_{,})$$

ergibt identisch

$$A_1^2 - \frac{1}{12}A^2G = \frac{1}{2}(Ai_1 - Bi_0)\ ,$$

$$E_1^2 - \frac{1}{12}E^2G = \frac{1}{2}(Di_6 - Ei_5)\ ,$$

in Übereinstimmung mit den Resultaten des Art. 26.

Vergleicht man die Ausdrücke

$$\sqrt{g - \lambda f} = Px^2 + 2Qx + R\ ,$$

$$\begin{aligned} z &= x^2\mathrm{S}P + 2x\mathrm{S}Q + \mathrm{S}R \\ &= (Ay + B)x^2 + (Ay^2 + 4By + 3C)x - D - \frac{E}{y}\ , \end{aligned}$$

so folgt

$$\mathrm{S}P = Ay + B\ ,\qquad \mathrm{S}R = -D - \frac{E}{y}\ ,$$

$$\mathrm{S}Q = \frac{1}{2}(Ay^2 + 4By + 3C) = -\frac{1}{2}\left(3C + 4\frac{D}{y} + \frac{E}{y^2}\right)\ ,$$

wo die vier Wurzelwerte von y den zulässigen Zeichenwechseln von $PP'P''$ usw. entsprechen. Man findet nunmehr leicht

$$\mathrm{S}P'P'' = \frac{1}{2}(\mathrm{S}P)^2 - \frac{1}{2}\mathrm{S}P^2 = A\mathrm{S}Q - B\mathrm{S}P$$

$$= \frac{1}{2}A(Ay^2 + 2By + C) - A_1$$

und analog:

$$\mathrm{S}Q'Q'' = -\frac{1}{2}\left(ADy + 2BD + \frac{BE}{y}\right),$$

$$\mathrm{S}R'R'' = \frac{1}{2}E\left(C + 2\frac{D}{y} + \frac{E}{y^2}\right) - E_1,$$

nebst

$$PP'P'' = \frac{1}{2}i_0, \quad QQ'Q'' = \frac{1}{2}i_3, \quad RR'R'' = \frac{1}{2}i_6.$$

Damit gehen die drei Produkte hervor:

$$\prod(u-P) = u^3 - (Ay+B)u^2 + \left(\frac{1}{2}A(Ay^2 + 2By + C) - A_1\right)u - \frac{1}{2}i_0,$$

$$\prod(u-Q) = u^3 - \left(\frac{1}{4}\left(Ay^2 - \frac{E}{y^2}\right) + By - \frac{D}{y}\right)u^2 - \frac{1}{2}\left(ADy + 2BD + \frac{BE}{y}\right)u - \frac{1}{2}i_3,$$

$$\prod(u-R) = u^3 + \left(D + \frac{E}{y}\right)u^2 + \left(\frac{1}{2}E\left(C + 2\frac{D}{y} + \frac{E}{y^2}\right) - E_1\right)u - \frac{1}{2}i_6,$$

welche den oben gefundenen Werten von $\prod(v-P^2)\ldots$ und $\prod(w-PQ)\ldots$ zur Seite stehen.

28.

Es sollen jetzt die bei der Untersuchung der biquadratischen Funktion auftretenden Größen durch die Wurzeln x_k ausgedrückt werden. Wenn ξ_1 für $x = x_0$ und x_1, ξ_2 für $x = x_2$ und x_3 verschwindet, so ergeben die Zerlegungen der Art. 24/25:

$$x_0 + x_1 = -2\frac{m_1}{l_1} = -2\frac{B-P}{A} = -2\frac{C+\lambda}{B+P}$$

$$= -2\frac{D+R}{C-2\lambda+2Q} = -2\frac{Q'-Q''}{P'-P''},$$

$$x_2 + x_3 = -2\frac{m_2}{l_2} = -2\frac{B+P}{A} = -2\frac{C+\lambda}{B-P}$$

$$= -2\frac{D-R}{C-2\lambda-2Q} = -2\frac{Q'+Q''}{P'+P''},$$

$$x_0x_1 = \frac{n_1}{l_1} = \frac{C-2\lambda-2Q}{A} = \frac{D-R}{B+P} = \frac{E}{C-2\lambda+2Q} = \frac{R'-R''}{P'-P''},$$

$$x_2x_3 = \frac{n_2}{l_2} = \frac{C-2\lambda+2Q}{A} = \frac{D+R}{B-P} = \frac{E}{C-2\lambda-2Q} = \frac{R'+R''}{P'+P''}.$$

Hieraus folgt nicht allein

$$4P = A(x_0 + x_1 - x_2 - x_3) \,,$$
$$4Q = A(x_2 x_3 - x_0 x_1) \,,$$
$$4R = A\big(x_0 x_1 (x_2 + x_3) - x_2 x_3 (x_0 + x_1)\big) \,,$$

neben

$$4B = -A(x_0 + x_1 + x_2 + x_3) \,,$$
$$6C = A\big(x_0 x_1 + x_0 x_2 + x_0 x_3 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3\big) \,,$$
$$4D = -A\big(x_0 x_1 (x_2 + x_3) + x_2 x_3 (x_0 + x_1)\big) \,,$$
$$E = A x_0 x_1 x_2 x_3 \,,$$

sondern auch

$$4P' = A(x_0 - x_1 + x_2 - x_3) \,, \qquad 4P'' = A(x_0 - x_1 - x_2 + x_3) \,,$$
$$4Q' = A(x_1 x_3 - x_0 x_2) \,, \qquad 4Q'' = A(x_1 x_2 - x_0 x_3) \,,$$
$$4R' = A\big(x_0 x_2 (x_1 + x_3) - x_1 x_3 (x_0 + x_2)\big) \,,$$
$$4R'' = A\big(x_0 x_3 (x_1 + x_2) - x_1 x_2 (x_0 + x_3)\big) \,.$$

Schreibt man ferner

$$\varpi = (x_0 - x_1)(x_2 - x_3), \qquad \varpi' = (x_0 - x_2)(x_3 - x_1) \,,$$
$$\varpi'' = (x_0 - x_3)(x_1 - x_2) \,, \qquad \varpi + \varpi' + \varpi'' = 0 \,,$$

so geht die Gleichung

$$6\lambda = 2 m_1 m_2 - l_1 n_2 - l_2 n_1$$

über in

$$\lambda = \frac{1}{12} A(\varpi' - \varpi'') \,, \quad \text{nebst} \quad \lambda' = \frac{1}{12} A(\varpi'' - \varpi) \,, \quad \text{und} \quad \lambda'' = \frac{1}{12} A(\varpi - \varpi') \,,$$

folglich auch

$$\lambda' - \lambda'' = -\frac{1}{4} A\varpi \,, \qquad \lambda'' - \lambda = -\frac{1}{4} A\varpi' \,, \qquad \lambda - \lambda' = -\frac{1}{4} A\varpi'' \,.$$[1]

[1] Es mögen noch die Summen $\mathrm{S}\varpi P$, $\mathrm{S}\varpi Q$ und $\mathrm{S}\varpi R$ untersucht werden. Man findet leicht die Ausdrücke

$$\mathrm{S}\varpi P = \frac{1}{2} A(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) \,,$$
$$\mathrm{S}\varpi Q = -\frac{1}{2} A x_0 (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) \,,$$
$$\mathrm{S}\varpi R = \frac{1}{2} A x_0^2 (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) \,,$$

mithin auch

$$\mathrm{S}\varpi(Px^2 + 2Qx + R) = \frac{1}{2} A(x_1 - x_2 \cdot x_2 - x_3 \cdot x_3 - x_1)(x - x_0)^2 .$$

Daraus folgt, daß die Summe

$$\mathrm{S}(\lambda'' - \lambda')\sqrt{g - \lambda f} \,,$$

abgesehen von konstanten Faktoren, die Quadrate der linearen Faktoren der Funktion f

Die entwickelten Formeln zeigen, daß zwischen der biquadratischen Gleichung und der kubischen Resolvente eine gewisse Reziprozität besteht, sofern nicht allein die Wurzeln x_k mittelst der λ, sondern auch die Wurzeln λ durch die x_k ausgedrückt werden, so daß die Auflösung kubischer und biquadratischer Gleichungen gegenseitig aufeinander reduktibel ist.[1]) Übrigens ist leicht einzusehen, daß man an Stelle von $\lambda = \frac{1}{12} A(\varpi' - \varpi'')$ eine kubische Resolvente für $\varLambda = \lambda' - \lambda'' = -\frac{1}{4} A\varpi$ konstruieren kann, welche die Form hat

$$4\varLambda^3 = 3G\varLambda \pm \sqrt{G^3 - 27H^2}\,.$$

darstellt, wenn man die Vorzeichen zweier Radikale beliebig annimmt. In der Tat erhält man durch Multiplikation der vier Aggregate

$$(\lambda'' - \lambda')\sqrt{g - \lambda f} \pm (\lambda - \lambda'')\sqrt{g - \lambda' f} \pm (\lambda' - \lambda)\sqrt{g - \lambda'' f}\,,$$

wie schon Cayley andeutet, für beliebige Werte von f und g den Wert

$$\frac{1}{16} ff(G^3 - 27H^2)\,.$$

1) Man wird, um die Wurzeln einer kubischen Gleichung durch die x_k zu bestimmen, diese Gleichung einfach auf die Form $4\lambda^3 = G\lambda + H$ zu bringen, und damit eine biquadratische Funktion f mit den Invarianten G und H zu vergleichen haben. Dazu reicht es aus, etwa die beiden Koeffizienten A und E durch die willkürlich gewählten BCD mittelst der Gleichungen

$$G = AE - 4BD + C^2 \qquad \text{und} \qquad H = ACE - AD^2 - B^2E + 2BCD - C^3$$

auszudrücken. Man erhält sogleich durch Auflösung einer quadratischen Gleichung, für

$$Q^2 = 16(C^2 - BD)^3 - 4(2C^4 - 3BC^2D + B^2D^2)G + \\ + 4C(2C^2 - 3BD)H + (CG - H)^2:$$

$$2AD^2 = CG - H - 2C(2C^2 - 3BD) + Q\,,$$

$$2B^2E = CG - H - 2C(2C^2 - 3BD) - Q\,.$$

Setzt man beispielsweise $C = 0$, also $\sum x_0 x_1 = 0$, so folgt

$$2AD^2 = Q - H\,, \qquad 2B^2E = -Q - H$$

nebst

$$Q^2 = -16B^3D^3 - 4B^2E^2G + H^2\,.$$

Analog findet man für $B = 0$:

$$AD^2 = CG - H - 4C^3\,, \qquad E = \frac{G - 3C^2}{A} = \frac{D^2(G - 3C^2)}{CG - H - 4C^3}\,,$$

folglich für $B = C = 0$ und $D = 1$:

$$A = -H, \qquad E = -\frac{G}{H}\,,$$

so daß die x_k der biquadratischen Gleichung entsprechen:

$$H^2x^4 - 4Hx + G = 0\,.$$

Verwandte Betrachtungen lassen sich bei den Gleichungen fünften und sechsten Grades anstellen, weil nicht allein, wie seit Lagrange bekannt, die Funktionen fünften Grades *bikubische Resolventen* besitzen, sondern auch gewisse bikubische Gleichungen, wie später gezeigt werden soll, eine Graderniedrigung um eine Einheit gestatten.

29.

Die kubische Resolvente liefert für die Wurzeln λ die Gleichungen

$$S\lambda = 0\,, \qquad S\lambda\lambda' = -\frac{1}{4}G \qquad \text{und} \qquad \lambda\lambda'\lambda'' = \frac{1}{4}H = \lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{4}G\right);$$

die Diskriminante erhält man aus dem Werte der Invariante J, wenn man

$$A = 4\,, \qquad B = 0\,, \qquad C = -\frac{1}{8}G \qquad \text{und} \qquad D = -H$$

setzt. Damit wird

$$A_1 = \frac{4}{3}G\,, \qquad B_1 = 4H\,, \qquad C_1 = \frac{1}{9}G^2\,,$$

folglich

$$J = -\frac{16}{27}(G^3 - 27H^2) = -\frac{256}{27}(\lambda - \lambda' \cdot \lambda' - \lambda'' \cdot \lambda'' - \lambda)^2$$

$$= -\frac{1}{16 \cdot 27}A^6 \varpi^2 \varpi'^2 \varpi''^2 = -\frac{1}{16 \cdot 27}A^6 \prod{}^*(x_i - x_k)^2\,,$$

oder

$$D_4(f) = G^3 - 27H^2 = -\frac{27}{16}J = \frac{1}{256}A^6 \prod{}^*(x_i - x_k)^2\,,$$

während durch Einführung der Koeffizienten i_k von h:

$$G^3 - 27H^2 = 36(4i_2i_4 - i_1i_5 - 3i_3i_3)$$

$$= \frac{9}{2}(3i_0i_6 + 5i_2i_4 - 8i_1i_5)$$

$$= 4(4i_0i_6 + 5i_3i_3 - 9i_1i_5)\,.$$

Wir bemerken noch die identische Gleichung

$$G^3 - 27H^2 = (12\lambda^2 - G)^2(G - 3\lambda^2) + 12(4\lambda^3 - G\lambda + H)(4\lambda^3 - G\lambda - H)\,,$$

oder wenn zur Abkürzung geschrieben wird

$$\mu^2 = 12\lambda^2 - G = 4(\lambda - \lambda')(\lambda - \lambda'')\,,$$

$$\nu^2 = G - 3\lambda^2 = (\lambda' - \lambda'')^2 = \lambda^2 - \frac{H}{\lambda} = 9\lambda^2 - \mu^2:$$

$$G^3 - 27H^2 = \mu^4\nu^2\,.$$

Zugleich schließen wir, daß für einen reellen Wert von λ^2, ν^2 gleiches Vorzeichen mit $G^3 - 27H^2$ haben muß. Für reelle Werte von G und H

werden die Wurzeln $\lambda\lambda'\lambda''$ sämtlich reell, wenn $G^3 > 27H^2$ oder $G > 3\lambda^2$, während im entgegengesetzten Falle λ' und λ'' konjugierte komplexe Werte annehmen. Dann hat man $G < 3\lambda^2$, und ν wird rein imaginär.

Es ergeben sich ferner ohne Schwierigkeit die Werte

$$\mu^2 = -\frac{1}{4}A^2\varpi'\varpi'', \qquad \mu'^2 = -\frac{1}{4}A^2\varpi\varpi'', \qquad \mu''^2 = -\frac{1}{4}A^2\varpi\varpi',$$

$$\nu^2 = \frac{1}{16}A^2\varpi^2, \qquad \nu'^2 = \frac{1}{16}A^2\varpi'^2, \qquad \nu''^2 = \frac{1}{16}A^2\varpi''^2,$$

und wegen

$$S\lambda^2 = \frac{1}{2}G, \qquad S\lambda^2\lambda'^2 = \frac{1}{16}G^2, \qquad \lambda^2\lambda'^2\lambda''^2 = \frac{1}{16}H^2:$$

$$S\mu^2 = 3G, \qquad S\mu^2\mu'^2 = 0,$$

$$\mu^2\mu'^2\mu''^2 = \prod(12\lambda^2 - G) = -4(G^3 - 27H^2);$$

$$S\nu^2 = \frac{3}{2}G, \qquad S\nu^2\nu'^2 = \frac{9}{16}G^2,$$

$$\nu^2\nu'^2\nu''^2 = \prod(G - 3\lambda^2) = \frac{1}{16}(G^3 - 27H^2).$$

Die Invarianten G und H aber sind gegeben durch

$$G = \frac{1}{24}A^2(\varpi^2 + \varpi'^2 + \varpi''^2) = 2(\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2),$$

$$= -4(\lambda'\lambda'' + \lambda''\lambda + \lambda\lambda') = \frac{2}{3}\left((\lambda' - \lambda'')^2 + (\lambda'' - \lambda)^2 + (\lambda - \lambda')^2\right),$$

$$= \frac{1}{8}(\mu^2 + \mu'^2 + \mu''^2) = -\frac{1}{12}A^2(\varpi'\varpi'' + \varpi''\varpi + \varpi\varpi'),$$

$$= \frac{1}{24}A^2\sum_3(x_0 - x_1)^2(x_2 - x_3)^2 = \frac{1}{12}A^2\sum_3(x_0 - x_1)(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_0),$$

$$H = \frac{1}{432}A^3(\varpi' - \varpi'')(\varpi'' - \varpi)(\varpi - \varpi') = 4\lambda\lambda'\lambda'',$$

$$= \frac{1}{432}A^3\sum_6(x_0 - x_1)^2(x_2 - x_3)^2(x_0 - x_2)(x_1 - x_3).$$

Für die Kovarianten endlich erhält man die symmetrischen Summen:

$$g = \frac{1}{48}A^2\sum_6(x_0 - x_1)^2(x - x_2)^2(x - x_3)^2,$$

$$h = \frac{1}{32}A^3\sum_4(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)(x - x_1)^2(x - x_2)^2(x - x_3)^2,$$

$$= \frac{1}{192}A^3\sum_{24}(x_0 - x_1)^2(x_0 - x_2)(x - x_1)(x - x_2)^2(x - x_3)^3,$$

resp. mit sechs, und mit vier oder vierundzwanzig Gliedern.

Es möge noch die direkte Bestimmung der Wurzeln λ der Resolvente

$$4\lambda^3 = G\lambda + H,$$

in welche die allgemeine Gleichung $Ax^3 + 3Bx^2 + 3Cx + D = 0$ übergeht, wenn man

$$Ax = 2\lambda - B, \qquad G = 3A_1 \quad \text{und} \quad H = \frac{1}{2} i_0$$

schreibt, als Beispiel für die Auflösung einer kubischen Gleichung Platz finden. Man erhält sogleich nach dem Früheren der Art. 20, 21

$$\lambda = \frac{a+a'}{4} = -\frac{b-b'}{a-a'} = \frac{H}{b+b'-\frac{1}{3}G},$$

$$\lambda' = \frac{-aj+a'j^2}{4} = -\frac{b+b'j}{a+a'j} = \frac{H}{-bj+b'j^2-\frac{1}{3}G},$$

$$\lambda'' = \frac{aj^2-a'j}{4} = -\frac{b'+bj}{a'+aj} = \frac{H}{bj^2-b'j-\frac{1}{3}G},$$

nebst den Gleichungen

$$aa' = \frac{4}{3}G, \quad bb' = \frac{1}{9}G^2, \quad ab'+a'b = 4H, \quad ab'-a'b = \sqrt{J},$$

$$a^3 + a'^3 = i_0 = 16H, \quad a^3 - a'^3 = A\sqrt{J} = 16W,$$

$$b^3 + b'^3 = i_3 = 2(H^2+W^2), \quad b^3 - b'^3 = D\sqrt{J} = -4HW,$$

wo

$$W^2 = H^2 - \left(\frac{1}{3}G\right)^3 \quad \text{oder} \quad 4W = \sqrt{J}$$

geschrieben ist. Damit ergeben sich die Werte:

$$a = 2(H+W)^{\frac{1}{3}}, \qquad a' = 2(H-W)^{\frac{1}{3}},$$

$$b = (H-W)^{\frac{2}{3}}, \qquad b' = (H+W)^{\frac{2}{3}},$$

folglich auch

$$2\lambda = (H+W)^{\frac{1}{3}} + (H-W)^{\frac{1}{3}},$$

$$2\lambda' = -j(H+W)^{\frac{1}{3}} + j^2(H-W)^{\frac{1}{3}},$$

$$2\lambda'' = j^2(H+W)^{\frac{1}{3}} - j(H-W)^{\frac{1}{3}},$$

nebst

$$2(\lambda'-\lambda'')i = \sqrt{3}\left((H+W)^{\frac{1}{3}} - (H-W)^{\frac{1}{3}}\right),$$

$$2(\lambda-\lambda'')i = \sqrt{3}\left(j(H+W)^{\frac{1}{3}} + j^2(H-W)^{\frac{1}{3}}\right),$$

$$2(\lambda-\lambda')i = \sqrt{3}\left(j^2(H+W)^{\frac{1}{3}} + j(H-W)^{\frac{1}{3}}\right).$$

Schreibt man endlich zur Bestimmung des Vorzeichens von ν:

$$\nu = \lambda' - \lambda'', \qquad \nu' = \lambda'' - \lambda, \qquad \nu'' = \lambda - \lambda',$$

so wird

$$\mu^2 = -4\nu'\nu'' = G + 3\left((H+W)^{\frac{2}{3}} + (H-W)^{\frac{2}{3}}\right),$$

$$\mu'^2 = -4\nu''\nu = G + 3\left(j^2(H+W)^{\frac{2}{3}} - j(H-W)^{\frac{2}{3}}\right),$$

$$\mu''^2 = -4\nu\nu' = G + 3\left(-j(H+W)^{\frac{2}{3}} + j^2(H-W)^{\frac{2}{3}}\right).$$

30.

Im Folgenden wollen wir unter λ_0 in jedem Falle diejenige reelle Wurzel verstehen, welche von gleichem Vorzeichen mit H ist. Daß nur *eine* solche stets vorhanden sein muß, ergeben die Relationen

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \qquad \text{und} \qquad H = 4\lambda_0\lambda_1\lambda_2 = \lambda_0(4\lambda_0^2 - G).$$

Durch Auflösung der quadratischen Gleichung

$$\lambda^2 + \lambda_0\lambda + \lambda_0^2 - \frac{1}{4}G = 0$$

folgt sogleich

$$2\lambda_1 = -\lambda_0 + \nu_0, \qquad 2\lambda_2 = -\lambda_0 - \nu_0.$$

Ist nun $G^3 > 27H^2$ oder $W^2 < 0$, so soll, da ν_0 reell oder $\nu_0^2 > 0$ ist, λ_1 die mittlere der drei reellen Wurzeln bezeichnen. Dann wird

$$\text{für} \quad H > 0, \qquad \lambda_0 > 0 > \lambda_1 > \lambda_2,$$

$$\text{für} \quad H < 0, \qquad \lambda_0 < 0 < \lambda_1 < \lambda_2,$$

mithin haben

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \nu_0, \qquad \lambda_0 - \lambda_1 = \nu_2 \qquad \text{und} \qquad \lambda_0 - \lambda_2 = -\nu_1$$

das Vorzeichen von H. Daraus folgt, daß

$$\mu_0^2 = -4\nu_1\nu_2 \qquad \text{und} \qquad \mu_2^2 = -4\nu_0\nu_1$$

positiv, also μ_0 und μ_2 reell werden, während

$$\mu_1^2 = -4\nu_0\nu_2$$

negativ und μ_1 imaginär sein muß.

Geht man zu den Wurzelquadraten über, so folgt nicht allein

$$\mu^2 + \nu^2 = 9\lambda^2 > \mu^2,$$

sondern es gelten in jedem Falle die Ungleichungen

$$(\lambda_1 + \lambda_2)^2 = \lambda_0^2 > \lambda_2^2 > \lambda_1^2,$$

so daß λ_2^2 das *mittlere Wurzelquadrat* ist. Man kann diese Ungleichung vervollständigen und schreiben:

$$\frac{1}{3} G > \lambda_0^2 > \frac{1}{4} G > \lambda_2^2 > \frac{1}{12} G > \lambda_1^2 > 0,$$

wie die Werte der symmetrischen Produkte

$$\prod(G - 3\lambda^2) > 0, \quad \prod(12\lambda^2 - G) < 0 \quad \text{und} \quad \prod(4\lambda^2 - G) = 4H^2$$

ohne Schwierigkeit ergeben.

Besteht aber die Ungleichung $G^3 < 27H^2$ oder $W^2 > 0$, so hat man auch

$$\nu_0^2 = G - 3\lambda_0^2 = \lambda_0^2 - \frac{H}{\lambda_0} = 9\lambda_0^2 - \mu_0^2 < 0.$$

Folglich ist ν_0 rein imaginär, μ_0 reell und λ_0 die einzige reelle Wurzel, während λ_1 und λ_2, ν_1 und ν_2, sowie μ_1^2 und μ_2^2 konjugierte Werte haben. Auch ergibt sich, da für

$$G^3 = 27H^2, \qquad G = 3\lambda_0^2 = 12\lambda_1^2 = 12\lambda_2^2,$$

und in diesem Grenzfalle die Werte

$$\lambda^2 = \frac{1}{3} G \quad \text{und} \quad \lambda = H^{\frac{1}{3}}$$

zusammengehören, die doppelte Ungleichung[1]):

$$H^{\frac{2}{3}} > \lambda_0^2 > \frac{1}{3} G,$$

die für $G < 0$ durch $H^{\frac{2}{3}} > \lambda_0^2 > 0$ zu ersetzen ist. Das Produkt der beiden komplexen Wurzeln gibt

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{H}{4\lambda_0} = \lambda_0^2 - \frac{1}{4} G,$$

auch hat man

$$\mu_0^2 > 9\lambda_0^2 > 3G \text{ resp. } > 0.$$

31.

Wir untersuchen noch die Realitätsbedingungen für die Wurzeln $y = x_k$ der biquadratischen Gleichung $fy = 0$.

Aus dem Vorhergehenden erhellt, da die drei Wurzeln λ der kubischen Resolvente den drei möglichen Zerlegungen der biquadratischen Funktion

---

1) In der Tat erhält man für

$$\lambda^2 = \frac{1}{3} G > H^{\frac{2}{3}}, \qquad (4\lambda^3 - G\lambda)^2 > H^2,$$

und für

$$\lambda^2 = H^{\frac{2}{3}} > \frac{1}{3} G, \qquad (4\lambda^3 - G\lambda)^2 < H^2,$$

so daß zwischen $\frac{1}{3} G$ und $H^{\frac{2}{3}}$ das Quadrat einer Wurzel $\pm\lambda_0$ liegen muß, für welche $(4\lambda^3 - G\lambda)^2 = H^2$.

in Faktoren zweiten Grades entsprechen, daß die Realität einer Zerlegung von der Realität der Größen λPQR abhängt. Nun ist die Realität von $P^2Q^2R^2$ an die der zugehörigen Wurzeln λ geknüpft, dagegen muß, wenn auch die Radikale PQR reell sein sollen, die Ungleichung $A_1 > A\lambda$ erfüllt sein. Dann ist nicht allein $P = \sqrt{A_1 - A\lambda}$ reell, sondern neben den Produkten PQ und PR auch Q und R. Folglich wird zugleich $(C - 2\lambda)^2 > AE$ und $E_1 > E\lambda$, so daß diese drei Ungleichungen sich gegenseitig bedingen. Früher fanden wir

$$PP'P'' = \frac{1}{2}\, i_0 \quad \text{oder} \quad i_0 i_0 = 4 \prod (A_1 - A\lambda),$$

und von diesen drei Faktoren muß mindestens *einer* reell und positiv sein, während das Gleiche nur von dem *Produkt* der beiden übrigen behauptet werden kann. Für $G^3 < 27H^2$ sind $A_1 - A\lambda'$ und $A_1 - A\lambda''$ konjugiert komplex, so daß $A_1 - A\lambda > 0$ und die zugehörigen Werte von PQR reell werden. Von den Wurzeln x_k der Funktion f sind alsdann zwei reell und zwei konjugiert komplex, wie sich sogleich aus der Ungleichung

$$s_1^2 s_2^2 = (m_1^2 - l_1 n_1)(m_2^2 - l_2 n_2) = G - 3\lambda^2 < 0$$

ergibt, da die reellen und komplexen Wurzeln von ξ_1 und ξ_2 sich durch das Vorzeichen von $s^2 = m^2 - ln$ unterscheiden.

Minder einfach ist die Entscheidung über das Vorzeichen von $A_1 - A\lambda$ für $G^3 > 27H^2$, wenn alle drei Wurzeln λ reell sind, so daß für

$$AH > 0: \quad A_1 - A\lambda_0 < A_1 < A_1 - A\lambda_1 < A_1 - A\lambda_2$$

wird, oder

$$P^2 < A_1 < P'^2 < P''^2,$$

während für

$$AH < 0: \quad P^2 > A_1 > P'^2 > P''^2.[1]$$

Um den für die Vorzeichen der P^2 gesuchten Bedingungen eine übersichtliche Form zu geben, gehen wir mit Clebsch[2]) und Noether aus von der Formel des Art. 27:

$$\prod (v - g + \lambda f) = v^3 - 3gv^2 + 3\left(g^2 - \frac{1}{12}\, Gf^2\right) v - \frac{1}{4}\, h^2 = 0.$$

Da diese Gleichung für reelle Werte von x und λ nur reelle Wurzeln hat, so ist nach einem bekannten Satze von Descartes die Anzahl der

---

1) Das Kriterium für die Existenz von vier reellen oder vier komplexen Wurzeln kann nicht von den Invarianten allein (ohne Zuziehung der Kovarianten) abhängen, weil eine lineare (nicht reelle) Transformation, welche beiderlei Wurzeln ineinander überführt, die Invarianten gleichwohl ungeändert läßt.

2) *Binäre Formen* S. 160 und 468.

positiven Wurzeln gleich der Anzahl der Zeichenwechsel in den Koeffizienten, also ist für *jede* Wurzel λ

$$g > \lambda f, \quad \text{wenn} \quad g > 0 \quad \text{und} \quad g^2 - \frac{1}{12} G f^2 = \frac{1}{2} [fh] > 0,$$

mit anderen Worten, wenn $g > \sqrt{\frac{1}{12} G f^2} > 0$. Anderenfalls hat man nur *einen* Zeichenwechsel, also einen positiven und zwei negative Werte für $v = (Px^2 + 2Qx + R)^2$.

Da PQR gleichzeitig entweder reelle oder imaginäre Werte annehmen, während die Variable x *reell* sein soll, so reicht zur Unterscheidung der beiden Fälle aus, daß v für *einen beliebigen* Wert von x das einer Wurzel λ entsprechende Vorzeichen enthält, um dasselbe für *alle* Werte von x zu behalten. Man kann folglich behaupten, daß, wenn die Ungleichungen

$$G^3 > 27 H^2 \quad \text{und} \quad g > \sqrt{\frac{1}{12} G f^2} > 0$$

für *einen beliebigen* reellen Wert von x erfüllt sind, alle drei Zerlegungen $f = \xi_1^2 \xi_2^2$ reell werden. Dies kann jedoch offenbar nur statthaben, wenn die Wurzeln x_k sämtlich reell sind, und umgekehrt. Es bleibt also schließlich noch der Fall von zwei Paaren konjugierter Wurzeln x_k, deren Existenz an das Stattfinden der Ungleichungen

$$G^3 > 27 H^2 \quad \text{und} \quad g < +\sqrt{\frac{1}{12} G f^2}$$

bei *einer* reellen Zerlegung geknüpft sein muß.

Wir werden bald sehen, daß den gefundenen Ungleichungen noch andere Formen gegeben werden können. Für jetzt mag bemerkt werden, daß die früher für die Produkte

$$\prod (v - P^2), \qquad \prod (v - Q^2) \qquad \text{und} \qquad \prod (v - R^2)$$

aufgestellten Gleichungen durch die Zeichenwechsel ihrer Koeffizienten gleichfalls Bedingungen für die Realität von PQR, also auch der Wurzeln x_k liefern. Es ergeben sich danach für $G^3 > 27 H^2$ vier reelle Wurzeln:

1) wenn $A_1 > 0$ und $Ai_1 > Bi_0$, oder $A_1 > +\sqrt{\frac{1}{12} A^2 G}$,

2) wenn $C_1 + \frac{1}{12} G > 0$ und $Bi_4 > Di_2$,

3) wenn $E_1 > 0$ und $Di_6 > Ei_5$, oder $E_1 > +\sqrt{\frac{1}{12} E^2 G}$.

Anderenfalls hat f vier komplexe Wurzeln. Man sieht zugleich, daß die Formen 1) und 3) den Werten $x = \infty$ und $x = 0$ entsprechen.

32.

Bekanntlich sind durch Sturm allgemeine Kriterien für die Realität der Wurzeln algebraischer Gleichungen aufgestellt worden, aus denen hervorgeht, daß die Anzahl der konjugierten Wurzelpaare einer Funktion $f(\overset{m}{x})$ mit reellen Koeffizienten übereinstimmt mit der Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe

$$S_1, S_2, S_3, \cdots, S_m,$$

wo die sogenannten orthosymmetrischen Determinanten

$$S_i = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \cdots s_{i-1} \\ s_1 & s_2 \cdots s_i \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ s_{i-1} & s_i \cdots s_{2i-2} \end{vmatrix}$$

aus den Potenzsummen der Wurzeln zu bilden sind. Wir wenden zufolge des Art. 18 den Satz an auf die typische Gleichung

$$z^4 = 6gz^2 + 4hz + 3g^2 - Gf^2.$$

Dann werden nach Art. 19 die Größen S_i selbst Kovarianten vom Grade $i(i-1)(m-2)$, Dimension und Gewicht $i(i-1)$, und erhalten den Faktor $f^{(i-1)(i-2)}$, so daß dieselben durch die Kovarianten $\frac{S_i}{f^{(i-1)(i-2)}}$ vom Grade $2(i-1)(m-i)$, Dimension $2(i-1)$, Gewicht $i(i-1)$ ersetzt werden können. Man erhält wegen

$$m = s_0 = 4, \qquad s_1 = 0, \qquad s_2 = 12g, \qquad s_3 = 12h, \qquad s_4 = 4(21g^2 - Gf^2):$$

$$S_1 = 4, \qquad S_2 = 48g, \qquad S_3 = 192f^2(2Gg + 3Hf),$$

während nach Art. 6

$$S_4 = \prod\nolimits_{ik}^{*} (z_i - z_k)^2 = 256f^6(G^3 - 27H^2).$$

Folglich bleiben die Zeichenwechsel in der Reihe der Kovarianten

$$1,\ g,\ 2Gg + 3Hf \qquad \text{und} \qquad G^3 - 27H^2$$

zu untersuchen. Vier reelle Wurzeln erfordern lauter positive Vorzeichen, während für $G^3 < 27H^2$ nur *ein* Zeichenwechsel möglich[1]) ist, also zwei

---

1) Die Identität

$$(G^3 - 27H^2)(h^2 - 4g^3) = G^3h^2 + (3Hf - Gg)(3Hf + 2Gg)$$

Wurzeln reell werden. Für *zwei* Zeichenwechsel endlich überzeugt man sich leicht, daß $G^3 > 27H^2$ bleibt, mithin existieren nur komplexe Wurzeln, sobald g und $2Gg + 3Hf$ nicht gleichzeitig positiv sind.

Es ist auch nicht schwer, direkt nachzuweisen, daß für $g > 0$ die Ungleichung $g^2 > \frac{1}{12} f^2 G$ durch die andere $2Gg + 3Hf > 0$ ersetzt werden darf. Denn durch Multiplikation mit $4G^2$ folgt für $G^3 > 27H^2$:

$$4g^2G^2 > \frac{1}{3} f^2G^3 > 9f^2H^2 \qquad \text{oder} \qquad 2gG > \pm 3fH ,$$

und umgekehrt zeigt die Formel

$$h^2 = 4g^3 - f^2gG - f^3H$$

oder

$$g(12g^2 - f^2G) = 3h^2 + f^2(2gG + 3fH) ,$$

daß mit $2gG + 3fH$ auch $12g^2 - f^2G$ positiv wird. Die beiden betreffenden Ungleichungen sind folglich äquivalent.

33.

Um die Wurzeln der allgemeineren biquadratischen Funktion

$$wf - g = \mathfrak{A}(x - \mathfrak{x}_0)(x - \mathfrak{x}_1)(x - \mathfrak{x}_2)(x - \mathfrak{x}_3) = \mathfrak{f}$$

mit dem Differential

$$d\mathfrak{f} = f dw + \frac{2h}{f} dx$$ [1]

zu finden, oder die Gleichung

$$(Aw - A_1)x^4 + 4(Bw - B_1)x^3 + 6(Cw - C_1)x^2 +$$
$$+ 4(Dw - D_1)x + (Ew - E_1) = 0$$

aufzulösen, bilde man die Resolvente

$$4\lambda_w^3 - G_w\lambda_w - H_w = 0 ,$$

wo

$$G_w = Gw^2 + 3Hw + \frac{1}{12} G^2 ,$$

$$H_w = Hw^3 + \frac{1}{6} G^2w^2 + \frac{1}{4} GHw - \frac{1}{216} G^3 + \frac{1}{4} H^2 ,$$

---

zeigt, daß *drei* Zeichenwechsel unmöglich sind, denn für $g < 0$ ist

$$h^2 - 4g^3 = -f^2(Gg + Hf) > 0, \quad \text{d. h.} \quad Gg + Hf < 0 .$$

Ist nun $2Gg + 3Hf > 0$, so wird $Hf > 0$, $Gg < 0$, mithin

$$G > 0 \quad \text{und} \quad 3Hf - Gg > 0, \quad \text{also} \quad G^3 > 27H^2.$$

1) Nach Art. 24 wird $\frac{g}{f} = w = \frac{1}{12}(\xi'\xi' - 2\xi\xi'')$ neben $\frac{h}{f} = \frac{1}{12}\xi^3\xi'''$.

und für

$$\omega = \sqrt{4w^3 - Gw - H}:$$

$$G_w^3 - 27H_w^2 = \frac{1}{16}\omega^4(G^3 - 27H^2),$$

$$g_w = gw^2 - \frac{1}{6}Gfw - \frac{1}{12}(Gg + 3Hf),$$

$$h_w = \frac{1}{4}h\omega^2,$$

$$\lambda_w = \lambda w + \lambda^2 - \frac{1}{6}G.$$

Damit folgt

$$(Aw - A_1)x + (Bw - B_1) = \mathrm{S} \pm \sqrt{(A_1 - A\lambda)(w - \lambda')(w - \lambda'')},$$

$$= \mathrm{S}\sqrt{(A_1 - A\lambda)\left(w^2 + \lambda w + \lambda^2 - \frac{1}{4}G\right)} = \frac{1}{2}\omega\,\mathrm{S}\sqrt{\frac{A_1 - A\lambda}{w - \lambda}}.$$

Das Produkt der in den Summen S enthaltenen Radikale muß für positive Werte von ω das Vorzeichen von $(i_0)_w = \frac{1}{4}i_0\omega^2$, d. h. von i_0 besitzen. Für $w = 0$ ergeben sich die Art. 26 abgeleiteten Wurzeln von g, für $w = \lambda$ dagegen fallen je zwei Wurzeln der biquadratischen Gleichung zusammen, und man bekommt

$$(A_1 - A\lambda)x + (B_1 - B\lambda) = \frac{1}{2}\mu\sqrt{A_1 - A\lambda} \qquad \text{oder} \qquad Px + Q = \pm\frac{1}{2}\mu,$$

mit unseren früheren Resultaten übereinstimmend.

Bei dieser Gelegenheit sei noch bemerkt, daß für $G_w = 0$ die Gleichung $f \cdot w = g$ übergeht in

$$\frac{1}{8}Gg^2 + Hfg + \frac{1}{36}G^2f^2 = h_{\prime}h_{\prime} - hh_{\prime\prime} = -\frac{1}{2}[hh]_2 = 0.$$

Die Wurzeln dieser Kovariante achten Grades, Dimension 6, Gewicht 8, werden folglich durch Auflösung der Gleichung $fw - g = 0$ erhalten, wenn man

$$w = \frac{-3H + \sqrt{-\frac{1}{3}D_4(f)}}{2G}, \qquad \text{mithin} \qquad \omega^2 = -\frac{4D_4}{3G^2}w$$

setzt, wo wie früher die Diskriminante $D_4 = G^3 - 27H^2$ geschrieben ist. In analoger Weise ergeben sich die Wurzeln der Kovarianten

$$g_{\prime}g_{\prime} - gg_{\prime\prime} = -\frac{1}{2}[gg]_2 = -\frac{1}{12}(Gg + 3Hf) \qquad \text{für} \qquad w = -\frac{3H}{G},$$

$$f_{\prime}h - fh_{\prime} = [fh] = 2g^2 - \frac{1}{6}Gf^2 \qquad \text{für} \quad w = \pm\sqrt{\frac{1}{12}G},$$

$$g_{\prime}h - gh_{\prime} = [gh] = \frac{1}{6}f(2Gg + 3Hf) \qquad \text{für} \quad w = -\frac{3H}{2G}.$$

Vergleicht man namentlich in den Ausdrücken für f, g, $[fh]$ und $[gh]$ die Summen

$$\mathrm{S}\sqrt{A_1 - A\lambda}\,, \qquad \mathrm{S}\sqrt{(A_1 - A\lambda)\lambda'\lambda''}\,,$$

$$\mathrm{S}\sqrt{(A_1 - A\lambda)\left(\frac{1}{12}G + \lambda\sqrt{\frac{1}{12}G} + \lambda^2 - \frac{1}{4}G\right)}\,,$$

und

$$\mathrm{S}\sqrt{(A_1 - A\lambda)\left(\frac{9}{4}\frac{H^2}{G^2} - \frac{3}{2}\frac{H}{G}\lambda + \lambda^2 - \frac{1}{4}G\right)}\,,$$

so erkennt man sogleich, daß wenn für $A_1 > A\lambda$ f vier reelle Wurzeln hat, die Kovarianten g, $[fh]$ und $[gh]$ für reelle Werte von x nicht verschwinden, also ihr Vorzeichen nicht verändern können. Denn da

$$\mathrm{S}\lambda'\lambda'' = -\frac{1}{4}G\,, \qquad \mathrm{S}\left(\lambda^2 + \lambda\sqrt{\frac{1}{12}G} - \frac{1}{6}G\right) = 0\,,$$

und

$$\mathrm{S}(4G^2\lambda^2 - 6GH\lambda - G^3 + 9H^2) = 27H^2 - G^3\,,$$

so folgt, daß für reelle Werte der Wurzeln λ, oder $G^3 > 27H^2$, die verschiedenen Faktoren von $A_1 - A\lambda$ nicht sämtlich positiv sein können, also unter dem Wurzelzeichen negative Glieder liefern müssen.

Statt der Gleichung $\mathfrak{f}(x) = f\cdot w - g = 0$ mit den Wurzeln $\mathfrak{x}$ kann man die allgemeinere Gleichung untersuchen, deren Wurzeln $\mathfrak{y} = \frac{1}{x - \mathfrak{x}}$ für reelle Werte von x gleichzeitig mit $\mathfrak{x}$ reell oder komplex sind. Man erhält sogleich

$$\mathfrak{f}\mathfrak{y}^4 - \mathfrak{f}'\mathfrak{y}^3 + \frac{1}{2}\mathfrak{f}''\mathfrak{y}^2 - \frac{1}{6}\mathfrak{f}'''\mathfrak{y} + \frac{1}{24}\mathfrak{f}^{\mathrm{IV}} = 0$$

oder

$$\mathfrak{f}\mathfrak{y}^4 - 4\mathfrak{f}_{\prime}\mathfrak{y}^3 + 6\mathfrak{f}_{\prime\prime}\mathfrak{y}^2 - 4\mathfrak{f}_{\prime\prime\prime}\mathfrak{y} + \mathfrak{f}_{\mathrm{IV}} = 0\,,$$

woraus für

$$\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{y} = \mathfrak{z} + \mathfrak{f}_{\prime} \qquad \text{oder} \qquad \mathfrak{z} = \frac{\mathfrak{f}}{x - \mathfrak{x}} - \mathfrak{f}_{\prime}$$

die typische Gleichung hervorgeht:

$$\mathfrak{z}^4 = \left(6gw^2 - Gfw - \frac{1}{2}(Gg + 3Hf)\right)\mathfrak{z}^2 + h\omega^2\mathfrak{z} + 3g_w^2 - G_w\mathfrak{f}^2\,.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind gegeben durch

$$\mathfrak{z} = \mathrm{S}\sqrt{g_w - \lambda_w\mathfrak{f}} = \mathrm{S}\sqrt{(g - \lambda f)(w - \lambda')(w - \lambda'')} = \frac{1}{2}\,\omega\,\mathrm{S}\sqrt{\frac{g - \lambda f}{w - \lambda}}\,.$$

Um umgekehrt von dem Ausdruck dieser Wurzeln zur biquadratischen Gleichung für $\mathfrak{z}$ zurückzukehren, schreiben wir für

$$\gamma = \sqrt{(g - \lambda f)(w - \lambda')(w - \lambda'')}\,, \qquad \gamma^3 - \alpha\gamma^2 + \beta\gamma - \frac{1}{8}h\omega^2 = 0\,,$$

und berechnen die Werte

$$\mathrm{S}\gamma^2 = 3gw^2 - \frac{1}{2}Gfw - \frac{1}{4}(Gg + 3Hf)\,,$$

$$\mathrm{S}\gamma^2\gamma'^2 = \frac{1}{16}\,\omega^2\Big((12g^2 - Gf^2)w - (2Gg + 3Hf)f\Big)\,.$$

Da nun

$$\mathrm{S}\gamma = \alpha\,, \qquad \mathrm{S}\gamma\gamma' = \beta\,, \qquad \gamma\gamma'\gamma'' = \frac{1}{8}h\omega^2\,,$$

so findet man leicht

$$\alpha^2 = \mathrm{S}\gamma^2 + 2\mathrm{S}\gamma\gamma' = 3gw^2 - \frac{1}{2}Gfw - \frac{1}{4}(Gg + 3Hf) + 2\beta\,,$$

$$\beta^2 = \mathrm{S}\gamma^2\gamma'^2 + 2\gamma\gamma'\gamma''\mathrm{S}\gamma\,,$$

$$= \frac{1}{4}\,\omega^2\Big(h\alpha + \frac{1}{4}(12g^2 - Gf^2)w - \frac{1}{4}(2Gg + 3Hf)f\Big)\,,$$

und hieraus ergibt die Elimination von β sogleich die oben aufgestellte Gleichung für $\mathfrak{z} = \alpha$.

34.

Exkurs über die numerische Berechnung und die geometrische Konstruktion der Wurzeln kubischer und biquadratischer Gleichungen.

Die numerische Berechnung der reellen Wurzeln λ der kubischen Resolvente

$$4\lambda^3 = G\lambda + H$$

läßt sich durch geeignete Tafeln erleichtern, wenn man sich eines der Gauß'schen Auflösungsmethode dreigliedriger Gleichungen (Gauß' *Werke* Bd. 3, S. 85) analogen Verfahrens bedient.

Wir führen hierzu die sogenannte absolute Invariante

$$\Omega = \frac{G^3}{H^2} \quad \text{ein und setzen} \quad G\lambda = H\omega\,,$$

wodurch

$$4\omega^3 = \Omega(\omega + 1) \qquad \text{oder} \qquad \Omega = \frac{4\omega^3}{\omega + 1}$$

wird. Für $x > 1$ hat man, um alle reellen Werte von ω zu umfassen,

$$\omega_1 = \frac{1}{x}\,, \qquad \omega_2 = x\,, \qquad \omega_3 = -\frac{1}{x}\,, \qquad \omega_4 = -x$$

zu setzen. Damit folgt

$$0 < \frac{4}{x^3\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \Omega_1 < 2 < \frac{4x^2}{1 + \frac{1}{x}} = \Omega_2 < \infty\,,$$

$$0 > -\frac{4}{x^3}\,\frac{x}{x-1} = \Omega_3 > -\infty\,,$$

so daß ω und Ω gleiche Vorzeichen erhalten, während für $\omega_4 < -1$

$$\Omega_4 = 4x^2 \frac{x}{x-1} > 27,$$

sowohl wenn $\frac{3}{2} < x < \infty$, als wenn $\frac{3}{2} > x > 1$, alle positiven Werte > 27 durchläuft. Entnimmt man den Tafeln der sogenannten Additions- und Subtraktionslogarithmen zum Argument $\xi = \lg x$ die Werte von

$$\eta = \lg\left(1 + \frac{1}{x}\right) \quad \text{und} \quad \zeta = \lg\frac{x}{x-1},$$

so sind zu berechnen:

$$\lg \Omega_1 = 0.60206 - 3\xi - \eta, \qquad \lg \Omega_2 = 0.60206 + 2\xi - \eta,$$
$$\lg(-\Omega_3) = 0.60206 - 3\xi + \zeta, \qquad \lg \Omega_4 = 0.60206 + 2\xi + \zeta.$$

Auf drei Dezimalen erhält man mit leichter Mühe für die Logarithmen der Invariante $\pm\Omega$ zum Argument $\xi = \lg(\pm\omega)$ die Werte der nachstehenden Tabelle:

ω	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\Omega > 0$
8.	4.598	4.897	5.195	5.493	5.791	6.089	6.385	6.681	6.975	7.269	7.561
9.	7.561	7.851	8.138	8.423	8.705	8.983	9.257	9.526	9.790	0.048	0.301
0.	0.301	0.548	0.790	1.026	1.257	1.483	1.705	1.923	2.138	2.351	2.561
1.	2.561	2.769	2.975	3.181	3.385	3.589	3.791	3.993	4.195	4.397	4.598
$-\omega$											Ω 0
8.	4.606	4.908	5.209	5.511	5.813	6.116	6.420	6.724	7.030	7.338	7.648
9.	7.648	7.960	8.277	8.599	8.928	9.267	9.623	0.004	0.435	0.989	∞
9.7	0.004	0.044	0.085	0.127	0.168	0.211	0.254	0.298	0.343	0.388	0.435
9.8	0.435	0.483	0.531	0.582	0.633	0.687	0.742	0.799	0.859	0.922	0.989
9.9	0.989	1.060	1.136	1.219	1.311	1.416	1.538	1.688	1.889	2.215	∞
$-\omega$											$\Omega > 27$
0.0	∞	2.265	1.989	1.838	1.738	1.666	1.611	1.569	1.536	1.510	1.489
0.1	1.489	1.472	1.459	1.449	1.442	1.437	1.433	1.432	1.431	1.433	1.435
0.2	1.435	1.438	1.443	1.448	1.454	1.461	1.468	1.477	1.485	1.494	1.504
0.	∞	1.489	1.435	1.504	1.623	1.767	1.928	2.099	2.277	2.460	2.648
1.	2.648	2.838	3.030	3.224	3.420	3.616	3.813	4.011	4.209	4.408	4.606

Als Beispiel wählen wir einen Fall dreier reeller Wurzeln und setzen

$$G = 28, \qquad H = 24, \qquad \Omega = \frac{348}{9} = 38.1.$$

Dann gibt die Tafel zu $\lg \Omega = 1.581$:

$$\lg \omega = 0.544, \qquad \lg \omega' = 0.067\, n, \qquad \lg \omega'' = 0.368\, n.$$

Bei der Interpolation zwischen 0.4 und 0.3 hat man mit Rücksicht auf den geringen Umfang der Tafel in der Nähe von 1.623 nicht eine der Nachbardifferenzen 119 oder 144, sondern deren arithmetisches Mittel 131 zu benutzen. In der Tat wird wegen

$$1623 - 1581 = 42 \ , \qquad 3.68 = 4 - \frac{42}{131} \cdot$$

Mittelst

$$\lambda = \frac{H}{G}\,\omega \ , \qquad \lg\frac{H}{G} = \lg\frac{6}{7} = 9.933$$

erhält man nunmehr:

$$\lg\lambda = 0.477 \ , \qquad \lg\lambda' = 0.000\,n \ , \qquad \lg\lambda'' = 0.301\,n \ ,$$

oder

$$\lambda = 3 \ , \qquad \lambda' = -1 \ , \qquad \lambda'' = -2 \ .$$

Da jede kubische Gleichung auf die Form $4\lambda^3 = G\lambda + H$ gebracht werden kann, so läßt sich die vorstehende Tabelle allgemein zur Auffindung der reellen Wurzeln kubischer Gleichungen benutzen. Die biquadratischen Gleichungen mit den Invarianten G und H aber sind mit Hilfe von λ auf quadratische Gleichungen reduziert worden.

35.

Vielleicht ist hier der Ort, an die berühmte Konstruktion des Descartes[1]) für die Wurzeln kubischer und biquadratischer Gleichungen mittelst einer *gegebenen Parabel* zu erinnern, welche von Newton in der *Arithmetica universalis*[2]) weiter entwickelt worden ist.

Die Parabel

$$y^2 = px$$

mit dem Parameter p und der Kreis

$$x^2 + y^2 = 2ax + 2by$$

1) *Géométrie*, p. 389: *Or quand on est assuré que le Problême proposé est solide, soit que l'équation par laquelle on le cherche monte au quarré de quarré, soit qu'elle ne monte que jusques au cube, on peut toujours en trouver la racine par l'une des trois sections coniques, laquelle que ce soit ou même par quelque partie de l'une d'elles, tant petite qu'elle puisse être; en ne se servant au reste que de lignes droites, et de cercles.* [*Discours de la Méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences, plus la Dioptrique, les Météores et la Géométrie, qui sont des essais de cette Méthode. Leyde*, 1637]. Die Anwendung der Kegelschnitte zur Lösung solcher Probleme war schon Archimedes (Eutokios) und den arabischen Mathematikern bekannt. Vgl. das Kapitel „*Konstruktion der kubischen Gleichungen*" in Hankel's *Geschichte der Mathematik*, S. 274—280. Unter den neueren Bearbeitern der Aufgabe ist vor allen Chasles zu nennen. (*Construction des racines des équations du troisième et du quatrième degré,* Liouville's *Journal* T. XX, p. 329).

2) im *Appendix de Aequationum Constructione lineari.*

mit dem Halbmesser $h = \sqrt{a^2 + b^2}$ haben außer dem Koordinatenursprung die Punkte gemein, deren Ordinaten die kubische Gleichung

$$y^3 = (2a - p)py + 2bp^2$$

erfüllen. Setzt man daher $y = 2p\lambda$, so wird

$$4\lambda^3 = \frac{2a-p}{p}\lambda + \frac{b}{p} = G\lambda + H ,$$

woraus

$$a = \frac{1}{2}(G + 1)p , \qquad b = Hp$$

als Mittelpunktskoordinaten des durch den Scheitel der Parabel gezogenen Kreises folgen, während die Wurzeln $\lambda = \frac{y}{2p}$ sich durch die Ordinaten der übrigen Schnittpunkte beider Kurven bestimmen. Wie man zur gegebenen Parabel Achse und Parameter findet, braucht hier nicht erörtert zu werden; dagegen fragt sich, wie für $G^3 < 27H^2$ die beiden konjugierten Wurzeln zu konstruieren sind. Dieselben ergeben sich als Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\lambda'\lambda' + \frac{y}{2p}\lambda' + \frac{b}{2y} = 0 ,$$

oder für

$$y' = 2p\lambda' = \varrho e^{\varphi i} ,$$

$$y'y' + yy' + \frac{2bp^2}{y} = 0 ,$$

mithin

$$\varrho = p\sqrt{\frac{2b}{y}} , \qquad \varrho \cos\varphi = -\frac{1}{2}y .$$

In analoger Weise konstruiert man die Wurzeln der biquadratischen Gleichung $fx = 0$ mittelst der Ordinaten der Durchschnittspunkte der Parabel $y^2 = px$ und des Kreises $(x-a)^2 + (y-b)^2 = h^2$. Die Elimination von x ergibt

$$y^4 = (2a-p)py^2 + 2bp^2y + (h^2 - a^2 - b^2)p^2 .$$

Vergleicht man damit die Art. 27 entwickelte Gleichung

$$\zeta^4 = 6A_1\zeta^2 + 4i_0\zeta + 3A_1^2 - A^2G ,$$

so erhält man für

$$y = p\zeta = p(Ax + B) :$$

$$6A_1 = \frac{2a-p}{p} , \qquad 4i_0 = \frac{2b}{p} , \qquad 3A_1^2 - A^2G = \frac{h^2 - a^2 - b^2}{p^2} ,$$

folglich

$$a = \left(3A_1 + \frac{1}{2}\right)p, \qquad b = 2pi_0,$$

$$h = p\sqrt{\left(3A_1 + \frac{1}{2}\right)^2 + 4i_0^2 + 3A_1^2 - A^2G},$$

$$= 2p\sqrt{4\left(A_1 + \frac{1}{4}\right)^3 - A^2\left(A_1 + \frac{1}{4}\right)G - A^3H},$$

$$= 4p\sqrt{\left(A_1 + \frac{1}{4} - A\lambda\right)\left(A_1 + \frac{1}{4} - A\lambda'\right)\left(A_1 + \frac{1}{4} - A\lambda''\right)}.$$

Selbstverständlich sind keine reellen Wurzeln vorhanden, wenn der reelle Kreis die Parabel nicht schneidet, sowie wenn für $A_1 > A\lambda$ und $A_1 < A\lambda' < A\lambda''$ die Ungleichung $A\lambda' < A_1 + \frac{1}{4} < A\lambda''$ erfüllt ist, denn in diesem Falle wird der Halbmesser h imaginär.

Die beiden komplexen Wurzeln sind für $G^3 < 27H^2$ leicht zu konstruieren, nachdem die reellen Wurzeln

$$y_1 = p(Ax_1 + B) \quad \text{und} \quad y_2 = p(Ax_2 + B)$$

gefunden worden sind. Denn da für

$$y' = p(Ax' + B) = \varrho e^{\varphi i},$$

$$y'y' + (y_1 + y_2)y' + \frac{a^2 + b^2 - h^2}{y_1 y_2}p^2 = 0,$$

so ergibt sich

$$\varrho = p\sqrt{\frac{a^2 + b^2 - h^2}{y_1 y_2}}, \quad \text{nebst} \quad \varrho\cos\varphi = -\frac{1}{2}(y_1 + y_2).$$

Bei *vier* komplexen Wurzeln dagegen sind zwei konjugierte Paare $y' = \varrho e^{\varphi i}$ und $\varrho_1 e^{\varphi_1 i}$ zu bestimmen. Die Identität

$$y'^4 - 6A_1p^2y'^2 - 4i_0p^3y' + (A^2G - 3A_1^2)p^4 =$$
$$= (y'^2 - 2y'\varrho\cos\varphi + \varrho^2)(y'^2 - 2y'\varrho_1\cos\varphi_1 + \varrho_1^2)$$

liefert die Koeffizientengleichungen

$$\varrho\cos\varphi + \varrho_1\cos\varphi_1 = 0,$$
$$\varrho^2 + \varrho_1^2 + 4\varrho\varrho_1\cos\varphi\cos\varphi_1 = -6A_1p^2,$$
$$\varrho\varrho_1(\varrho_1\cos\varphi + \varrho\cos\varphi_1) = 2i_0p^3,$$
$$\varrho^2\varrho_1^2 = (A^2G - 3A_1^2)p^4.$$

Eliminiert man die Winkel φ und φ_1 und setzt

$$\varrho^2 + \varrho_1^2 = -2(2A\lambda + A_1)p^2,$$

so geht die kubische Resolvente $4\lambda^3 = G\lambda + H$ hervor, welche wie oben für $y = 2p\lambda$ durch

$$y^3 = (2a - p)py + 2bp^2$$

konstruiert werden kann. Dann wird wegen

$$\varrho^2 + \varrho_1^2 = -2(Ay + A_1 p)p, \qquad \varrho^2\varrho_1^2 = (A^2G - 3A_1^2)p^4,$$

$$\varrho^4 + 2(Ay + A_1p)p\varrho^2 + (A^2G - 3A_1^2)p^4 = 0,$$

und für

$$q^2 = (Ay + A_1p)^2 - (A^2G - 3A_1^2)p^2:$$

$$\varrho = \sqrt{(\pm q - A_1p - Ay)p}, \qquad \varrho\cos\varphi = \mp\frac{p^2 i_0}{q},$$

$$\varrho = \sqrt{(\mp q - A_1p - Ay)p}, \qquad \varrho_1\cos\varphi_1 = \pm\frac{p^2 i_0}{q}.$$

Es versteht sich, daß derjenige Wert der Ordinate y genommen werden muß, für welchen die bei einer reellen Zerlegung notwendige und ausreichende Bedingung erfüllt ist:

$$A_1 > A\lambda \quad \text{oder} \quad 2A_1p > Ay,$$

denn nur dann wird

$$q + A_1p + Ay < 0 \quad \text{und} \quad \varrho q > \pm p^2 i_0.$$

III. Anwendungen auf die Reduktion elliptischer Differentiale.

36.

Im 12. Bande der Abhandlungen der Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften S. 62 (math. phys. Klasse), sowie im 34. Bande der *Mathematischen Annalen* S. 529 findet sich der Satz entwickelt, daß für

$$fx = Ax^4 + 4Bx^3 \ldots = \xi\xi \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{f}y = \mathfrak{A}y^4 + 4\mathfrak{B}y^3 \ldots = \eta\eta$$

die transzendente Gleichung

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\xi} = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\eta}$$

durch die algebraische Relation

$$\frac{\xi_1 \xi_2^0 + \xi_2 \xi_1^0}{x - x_0} = \frac{\eta_1 \eta_2^0 + \eta_2 \eta_1^0}{y - y_0}$$

ersetzt werden kann, falls fx und $\mathfrak{f}y$ die nämlichen Invarianten

$$G = \mathfrak{G} \qquad \text{und} \qquad H = \mathfrak{H}$$

besitzen. Hier ist wie bisher $\xi = \xi_1 \xi_2$, $\eta = \eta_1 \eta_2$ geschrieben, wo

$$\xi_i^2 = l_i x^2 + 2 m_i x + n_i, \qquad \eta_i^2 = \mathfrak{l}_i y^2 + 2\mathfrak{m}_i y + \mathfrak{n}_i$$

$$\xi^0 = \xi(x_0), \qquad \eta^0 = \eta(y_0), \qquad m_1 m_2 = C + \lambda, \qquad \mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 = \mathfrak{C} + \lambda$$

während λ eine Wurzel des Resolvente $4\lambda^3 = G\lambda + H$ darstellt.

Wir schreiben ferner

$$\varpi(x\lambda) = \frac{\xi_1 \xi_2^0 + \xi_2 \xi_1^0}{2(x - x_0)}, \qquad \chi(y\lambda) = \frac{\eta_1 \eta_2^0 + \eta_2 \eta_1^0}{2(y - y_0)},$$

$$\varpi^2 = X - \lambda, \qquad \chi^2 = Y - \lambda, \qquad L^0 = Ax_0^2 + 2Bx_0 + C,$$

$$M^0 = Bx_0^2 + 2Cx_0 + D, \qquad N^0 = Cx_0^2 + 2Dx_0 + E,$$

wodurch

$$L^0 x^2 + 2M^0 x + N^0 = Lx_0^2 + 2Mx_0 + N.$$

Dieser Ausdruck stimmt mit der sogenannten zweiten Polare von fx:

$$\varphi_2(x x_0) = [f, (x - x_0)^2]_2 \text{ [1]}$$

überein, wie Hr. F. Klein, *Math. Annal.* Bd. 27, S. 454 angemerkt hat. Dann wird

$$X = \frac{L^0 x^2 + 2M^0 x + N^0 + \xi\xi^0}{2(x - x_0)^2} = \frac{\xi^0\xi + f^0}{2(x - x_0)^2} + \frac{f_\prime^0}{x - x_0} + \frac{1}{2} f_{\prime\prime}^0$$

$$= \left(\frac{1}{2}\,\frac{\xi + \xi^0}{x - x_0}\right)^2 - \frac{1}{4} A(x + x_0)^2 - B(x + x_0) - C. \text{ [2]}$$

Da somit X von der Wurzel λ unabhängig ist, so erhält man das Produkt

$$2\,\varpi\varpi'\varpi'' = \sqrt{4X^3 - GX - H},$$

und ebenso

$$2\,\chi\chi'\chi'' = \sqrt{4Y^3 - GY - H},$$

während durch Elimination des Radikals $\xi^0\xi$ die in Bezug auf X und $x - x_0$ quadratische Gleichung hervorgeht:

$$\left(X^2 - \frac{1}{12} G\right)(x - x_0)^2 = (L^0 x^2 + 2M^0 x + N^0)\, X - (L_1^0 x^2 + 2M_1^0 x + N_1^0)$$

oder

$$\left(X^2 - f_{\prime\prime}^0 X + g_{\prime\prime}^0 - \frac{1}{12} G\right)(x - x_0)^2 - 2(f_\prime^0 X - g_\prime^0)(x - x_0) - (f^0 X - g^0) = 0.$$

Hier ist wegen

$$g = A_1 x^4 + 4B_1 x^3 + 6C_1 x^2 \ldots = L_1 x^2 + 2M_1 x + N_1,$$

$$L_1^0 = A_1 x_0^2 + 2B_1 x_0 + C_1, \qquad M_1^0 = B_1 x_0^2 + 2C_1 x_0 + D_1, \quad \text{usw.}$$

gesetzt, folglich auch

$$L_1^0 x^2 + 2M_1^0 x + N_1^0 = L_1 x_0^2 + 2M_1 x_0 + N_1 = [g, (x - x_0)^2]_2.$$

In vorstehenden Ausdrücken dürfen x und x_0 vertauscht werden, wobei X ungeändert bleibt.

Nun ist seit Euler bekannt, daß, wenn

$$F(\overset{2}{x}\overset{2}{y}) = py^2 + 2p_1 y + p_2 = qx^2 + 2q_1 x + q_2 = 0$$

eine in Bezug auf x und y quadratische Gleichung darstellt, die Differentialformel

$$(qx + q_1)\,dx + (py + p_1)\,dy = 0$$

---

1) Vgl. oben Art. 12.

2) Biermann, *Dissert. inaug.* Berlin 1865 (nach Weierstraß).

in die Gleichung mit getrennten Variabeln übergeht:

$$\frac{dx^2}{p_1^2 - pp_2} = \frac{dy^2}{q_1^2 - qq_2},$$

oder für

$$f = p_1^2 - pp_2 = \xi\xi \quad \text{und} \quad \mathfrak{f} = q_1^2 - qq_2 = \eta\eta :$$

$$\frac{dx}{\xi} = \varepsilon \frac{dy}{\eta}.$$

Hier besitzen die biquadratischen Funktionen f und $\mathfrak{f}$ *gleiche Invarianten*, die Radikale ξ und η sollen als *positiv* vorausgesetzt werden, und ε bedeutet die positive oder negative Einheit, je nachdem x und y sich in gleichem oder entgegengesetztem Sinne ändern. Man hat daher auch

$$\xi = \pm (py + p_1), \qquad \eta = \mp \varepsilon (qx + q_1),$$

und schließt, daß für reelle Werte von x und y, ξ und η reell sind, während für reelle Werte von x und ξ auch y, und für reelle Werte von y und η auch x reell wird. Also müssen solche reelle Werte von x, welche ξ imaginär machen, komplexen Werten von y, und reelle Werte von y, welche η imaginär machen, komplexen Werten von x entsprechen.

37.

Die Gleichung $F(xy) = 0$ liefert zugleich die *vollständige* Integralgleichung der aufgestellten Differentialgleichung, da sie im Allgemeinen von *acht* Konstanten abhängt, während die Differentialformel, wegen der Gleichheit der Invarianten von ξ und η, nur *sieben* unabhängige Konstanten enthält. In Art. 8 und 9 der zitierten Abhandlung ist gezeigt, wie die Konstanten der Integralformel durch die der Differentialgleichung — in Verbindung mit $x_0 y_0 \xi^0 \eta^0$ — rational ausgedrückt werden. Schreibt man nun $x - x_0$ für x und X für y, wodurch

$$p = (x - x_0)^2, \qquad q = X^2 - f_{,,}^0 X + g_{,,}^0 - \frac{1}{12} G,$$

$$p_1 = -\frac{1}{2}\left(f_{,,}^0 (x - x_0)^2 + 2 f_{,}^0 (x - x_0) + f^0\right), \qquad q_1 = -(f_{,}^0 X - g_{,}^0),$$

$$p_2 = \left(g_{,,}^0 - \frac{1}{12} G\right)(x - x_0)^2 + 2 g_{,}^0 (x - x_0) + g^0, \qquad q_2 = -(f^0 X - g^0),$$

so erhält man nach einigen Reduktionen[1]), wegen

1) mittelst $g = f_{,} f_{,} - f f_{,,}$, $\quad 2 g_{,} = f_{,} f_{,,} - f f_{,,,}$,

$$4\left(g_{,,} - \frac{1}{12} G\right) = f_{,,} f_{,,} - f f_{IV},$$

$$\frac{1}{6} G f = 2 f_{,} g_{,} - f_{,,} g - f g_{,,},$$

$$\frac{1}{12}(G g + 3 H f) = g g_{,,} - g_{,} g_{,}.$$

$$\xi\xi = f^0 + 4f_{\prime}^0(x - x_0) + 6f_{\prime\prime}^0(x - x_0)^2 + 4f_{\prime\prime\prime}^0(x - x_0)^3 + f_{IV}^0(x - x_0)^4:$$

$$\frac{dx^2}{\xi\xi} = \frac{dX^2}{4X^3 - GX - H} = \frac{dX^2}{\Xi\Xi},$$

also

$$\frac{dx}{\xi} = \mp\frac{d\varpi}{\varpi'\varpi''} = \mp\frac{dX}{\Xi}.$$

Da X für $x = x_0$ über alle Grenzen wächst, so wird

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\xi} = \pm\int_{X}^{\infty}\frac{dX}{\Xi},$$

wo das Vorzeichen von $x - x_0$ zu nehmen ist.

Selbstverständlich erhält man ebenso

$$\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{\eta} = \pm\int_{Y}^{\infty}\frac{dY}{\Upsilon}, \qquad \Upsilon^2 = 4Y^3 - GY - H.$$

Hieraus folgt, daß die algebraische Gleichung $X = Y$ mit den Konstanten $x_0 y_0$ die Differentialgleichung $\left(\frac{dx}{\xi}\right)^2 = \left(\frac{dy}{\eta}\right)^2$ oder $\frac{dx}{\xi} = \varepsilon\frac{dy}{\eta}$ vollständig integriert, wenn ε *das Vorzeichen von* $(x - x_0)(y - y_0)$ *bedeutet.* Zugleich sieht man, daß für

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\xi} = \varepsilon\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{\eta}$$

die Gleichung

$$X = Y \quad \text{durch} \quad \varpi = \varepsilon\chi$$

ersetzt werden kann.[1])

---

1) Bei der Integration der Differentialgleichung $\frac{dx}{\xi} = \varepsilon\frac{dy}{\eta}$ vertreten die Größen x_0 und y_0 die Stelle *einer* Integrationskonstante und können durch zwei andere $x'y'$ ersetzt werden, welche dergestalt einander entsprechen, daß $\int_{x_0}^{x'}\frac{dx}{\xi} = \varepsilon\int_{y_0}^{y'}\frac{dy}{\eta}$, mit anderen Worten, daß für $x = x'$ $y = y'$ werde. In der Gleichung $\varpi = \varepsilon\chi$ oder $X = Y$ werden für $x = x_0$, $y = y_0$ beide Seiten unendlich, wenigstens solange wir die positiven Vorzeichen der Radikale $\xi\,\xi_1\,\xi_2$ in X und ϖ voraussetzen. Für die Ableitung der quadratischen Gleichung zwischen X und $x - x_0$ sind die Vorzeichen zwar gleichgültig, aber für die Werte

$$X = \frac{L^0x^2 + 2M^0x + N^0 - \xi\xi^0}{2(x - x_0)^2} \quad \text{oder} \quad \varpi = \pm\frac{\xi_1\xi_2^0 - \xi_2\xi_1^0}{2(x - x_0)}$$

wird, wenn $x = x_0$:

$$X = \frac{g^0}{f^0} \quad \text{und} \quad \varpi = \frac{1}{\xi^0}\sqrt{g^0 - \lambda f^0} = \frac{Px_0^2 + 2Qx_0 + R}{\xi^0}.$$

Die Auflösung der quadratischen Gleichung für X und $x - x_0$ liefert

$$x - x_0 = \frac{f^0 X - g^0}{\frac{1}{2}\xi^0 \Xi - (f_{,}^0 X - g_{,}^0)} = \frac{f X - g}{\frac{1}{2}\xi \Xi + f_{,} X - g_{,}},$$

wo $\Xi^2 = 4X^3 - GX - H$, und dieser Ausdruck wird *identisch* für

$$\Xi = -\xi \frac{dX}{dx} = \frac{f^0 \xi + f \xi^0}{(x - x_0)^3} + \frac{f_{,}^0 \xi - f_{,} \xi^0}{(x - x_0)^2},$$

$$= \frac{2}{\xi^0}\left(\frac{f^0 X - g^0}{x - x_0} + f_{,}^0 X - g_{,}^0\right) = \frac{2}{\xi}\left(\frac{f X - g}{x - x_0} - f_{,} X + g_{,}\right).$$

Bildet man in derselben Weise die Funktion $\Upsilon = -\eta \frac{dY}{dy}$, so folgt nicht allein $\Xi^2 = \Upsilon^2$ für $X = Y$, sondern es wird auch

$$\Xi \frac{dx}{\xi} = \Upsilon \frac{dy}{\eta}, \qquad \text{mithin} \qquad \Xi = \varepsilon \Upsilon.$$

Vertauscht man daher in dem obigen Ausdruck von $x - x_0$, X mit Y und Ξ mit $\varepsilon\Upsilon$, so ergibt sich die Gleichung

$$x - x_0 = \frac{f^0 Y - g^0}{\frac{1}{2}\varepsilon\xi^0 \Upsilon - f_{,}^0 Y + g_{,}^0} = \frac{q x_0^2 + 2 q_1 x_0 + q_2}{\pm \varepsilon\eta - q x_0 - q_1},$$

nebst

$$\xi = \varepsilon\eta \frac{dx}{dy} = \pm (py + p_1), \qquad \eta = \varepsilon\xi \frac{dy}{dx} = \mp \varepsilon (qx + q_1),$$

als die *Substitution*, durch welche

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\xi} \qquad \text{in} \qquad \varepsilon \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\eta}$$

übergeht. Umgekehrt hat man natürlich auch

$$y - y_0 = \frac{\mathfrak{f}^0 X - \mathfrak{g}^0}{\frac{1}{2}\varepsilon\eta^0 \Xi - \mathfrak{f}_{,}^0 X + \mathfrak{g}_{,}^0}$$

als Wurzel der quadratischen Gleichung

$$\left(X^2 - \frac{1}{12} G\right)(y - y_0)^2 = (\mathfrak{L} y_0^2 + 2\mathfrak{M} y_0 + \mathfrak{N}) X - (\mathfrak{L}_1 y_0^2 + 2\mathfrak{M}_1 y_0 + \mathfrak{N}_1).$$

Die entwickelten Gleichungen enthalten in verschiedenen Formen die allgemeinste algebraische Transformation elliptischer Differentiale mit gleichen Invarianten.

38.

Die den drei Wurzeln λ entsprechenden Gleichungen

$$\varpi = \varepsilon\chi, \qquad \varpi' = \varepsilon\chi', \qquad \varpi'' = \varepsilon\chi'',$$

sind offenbar vollkommen gleichberechtigt. Vielleicht ist die Bemerkung

nicht überflüssig, daß, wenn die gewählte Wurzel der kubischen Resolvente auf eine komplexe Zerlegung $\xi = \xi_1 \xi_2$ führt, dennoch das Aggregat $\xi_1 \xi_2^0 + \xi_2 \xi_1^0$ reell bleibt, weil ξ_1 und ξ_2 konjugierte Werte haben. Auch ist dasselbe für $x = x_0$ positiv und kann nur gleichzeitig mit $\eta_1 \eta_2^0 + \eta_2 \eta_1^0$ durch Null hindurchgehen. Es braucht selbst der Fall nicht ausgeschlossen zu werden, in welchem x_0 und y_0 komplexe Werte annehmen, nur müssen diese für unseren Zweck so bestimmt werden, daß die Substitution $\varpi = \varepsilon \chi$ reelle Werte von x und y liefere. Denn dann können in der Integralgleichung

$$\int_{x'}^{x} \frac{dx}{\xi} = \varepsilon \int_{y'}^{y} \frac{dy}{\eta}$$

für x' und y' irgend zwei *reelle* zusammengehörige Werte von x und y gesetzt werden. Da jede Gleichung zwischen komplexen Größen in zwei zerfällt, so muß eine Bedingung hinzutreten, damit aus der Gleichheit der reellen und der imaginären Teile die nämliche reelle Substitution hervorgehe. Wir werden auf diesen Punkt noch zurückzukommen haben.

Die allgemeinen Transformationsformeln lassen sich zur Reduktion des elliptischen Differentials namentlich auf verschiedene *kanonische* Formen anwenden. Durch Spezialisierungen treten wesentliche Vereinfachungen ein, wie wenn z. B. ξ^0 resp. η^0 verschwinden, oder wenn x_0 resp. y_0 Null oder unendlich werden. Für $\xi_1^0 = 0$ wird x_0 eine Wurzel der biquadratischen Gleichung $f = 0$, und wenn diese Wurzel komplex ist, so wird im Allgemeinen auch y komplex sein müssen. Es fragt sich dann, wie y_0 zu bestimmen ist, damit die Substitution in Bezug auf die zusammengehörigen Werte der Variabeln x und y reell bleibe.

Bezeichnet man durch x_1 und y_1 die konjugierten Werte von x_0 und y_0, so hat man für $\xi_1^0 = 0$ gleichzeitig

$$\frac{\xi_1 \xi_2^0}{x - x_0} = \varepsilon \frac{\eta_1 \eta_2^0 + \eta_2 \eta_1^0}{y - y_0} \quad \text{und} \quad \frac{\xi_1 \xi_2^1}{x - x_1} = \varepsilon \frac{\eta_1 \eta_2^1 + \eta_2 \eta_1^1}{y - y_1}.$$

Die Multiplikation ergibt wegen $\xi_1 \xi_1 = l_1 (x - x_0)(x - x_1)$

$$l_1 \xi_2^0 \xi_2^1 = \frac{(\eta_1 \eta_2^0 + \eta_2 \eta_1^0)(\eta_1 \eta_2^1 + \eta_2 \eta_1^1)}{(y - y_0)(y - y_1)}.$$

Man findet aber durch eine leichte Rechnung:

$$l_1 \xi_2^0 \xi_2^1 = l_1 \sqrt{(l_2 x_0^2 + 2 m_2 x_0 + n_2)(l_2 x_1^2 + 2 m_2 x_1 + n_2)},$$
$$= \sqrt{(l_1 n_2 - l_2 n_1)^2 - 4 (l_1 m_2 - l_2 m_1)(m_1 n_2 - m_2 n_1)} = 2 \mu .$$

Folglich erfüllen die konjugierten Werte von y_0 und y_1 die Bedingung

$$2\mu(y-y_0)(y-y_1) = (\eta_1\eta_2^0 + \eta_2\eta_1^0)(\eta_1\eta_2^1 + \eta_2\eta_1^1),$$

$$= \eta_1\eta_1\eta_2^0\eta_2^1 + \eta_2\eta_2\eta_1^0\eta_1^1 + \eta(\eta_1^0\eta_2^1 + \eta_2^0\eta_1^1).$$

Wegen der Rationalität der linken Seite erfordert diese Gleichung, daß $\eta_1^0\eta_2^1 + \eta_2^0\eta_1^1$ verschwinde, und dies ist, wie leicht zu sehen, nur möglich, wenn $\eta_1\eta_1 = \mathfrak{l}_1(y-y_0)(y-y_1)$, d. h. wenn y_0 und y_1 konjugierte Wurzeln von $\eta = 0$ sind. Dieser Fall wird später betrachtet werden.

Zunächst folgt für $f^0 = 0$

$$g^0 = f_{\prime}^0 f_{\prime}^0, \qquad g_{\prime}^0 = \frac{1}{2} f_{\prime}^0 f_{\prime\prime}^0, \qquad g_{\prime\prime}^0 = \frac{1}{12} G + \frac{1}{4} f_{\prime\prime}^0 f_{\prime\prime}^0,$$

und damit

$$X = \frac{f_{\prime}^0}{x-x_0} + \frac{1}{2} f_{\prime\prime}^0, \qquad \Xi = \frac{f_{\prime}^0 \xi}{(x-x_0)^2}, \qquad x - x_0 = \frac{f_{\prime}^0}{X - \frac{1}{2} f_{\prime\prime}^0}.$$

In diesem Falle kann man leicht die Variable x mittelst der Argumente der koordinierten Thetafunktionen $\vartheta_i(uq)$ ausdrücken, wo u das elliptische Integral

$$u = M\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\xi} = M\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{m^2\cos^2\varphi + n^2\sin^2\varphi}}, \qquad q = e^{-\pi\frac{M}{M'}},$$

und M das arithmetisch-geometrische Mittel zwischen m und n, M' dagegen das Mittel zwischen m und $n' = \sqrt{m^2 - n^2}$ bezeichnet.

Den Vorschriften in Bd. 34 der *Mathem. Annalen* S. 140/1 entsprechend erhält man für $G^3 > 27H^2$, wenn $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ die Wurzeln der kubischen Resolvente sind:

$$m = M\vartheta_3^2 = \sqrt{\lambda_1 - \lambda_3}, \qquad n = M\vartheta^2 = \sqrt{\lambda_1 - \lambda_2}, \qquad n' = M\vartheta_2^2 = \sqrt{\lambda_2 - \lambda_3},$$

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{\lambda_1 - \lambda_3}}{\varpi_3}, \qquad \cos\varphi = \frac{\varpi_1}{\varpi_3}, \qquad \Delta(\varphi x) = \frac{\varpi_2}{\varpi_3},$$

$$u = \frac{M}{m}\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi x)}, \qquad x = \frac{n'}{m} = \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_3}}, \qquad x' = \frac{n}{m} = \sqrt{\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_3}}.$$

Weiter ergibt sich

$$x - x_0 = \frac{2f_{\prime}^0 \vartheta_1^2(u,q)}{(2\lambda - f_{\prime\prime}^0)\vartheta_1^2 u + \mu\vartheta_2^2 u},$$

wenn für $\lambda = \lambda_1$ die *größte* Wurzel genommen wird, also $\mu = 2mn$. Für $\lambda = \lambda_2$ geht $\mu\vartheta_2^2 u$ über in $2nn'\vartheta_3^2 u$, für $\lambda = \lambda_3$ endlich in $2mn'\vartheta^2 u$, während

$$X = \lambda_1 + \frac{m^2}{\operatorname{tg}^2\varphi} = \lambda_2 + m^2\frac{\Delta^2\varphi}{\sin^2\varphi} = \lambda_3 + \frac{m^2}{\sin^2\varphi}.$$

Für $G^3 < 27H^2$ dagegen ist nur *eine* Wurzel $\lambda = \frac{1}{6} M^2(\vartheta^4 - \vartheta_2^4)$ reell und wegen $\mu^2 = 12\lambda^2 - G$ hat man zu setzen:

$$m = M\vartheta_3^2 = \sqrt{2\mu}\,, \qquad n = M\vartheta^2 = \sqrt{\mu + 3\lambda}\,, \qquad n' = M\vartheta_2^2 = \sqrt{\mu - 3\lambda}\,.$$

Damit folgt

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi = \frac{\vartheta_1(\frac{1}{2}u, i\sqrt{q})}{\vartheta_2(\frac{1}{2}u, i\sqrt{q})} = \frac{1}{\varpi}\sqrt{\frac{1}{2}\mu}\,, \qquad \varkappa = \sqrt{\frac{\mu - 3\lambda}{2\mu}}\,,$$

mithin gehen jetzt die Ausdrücke hervor:

$$x - x_0 = \frac{2f_{,}^{0}\vartheta_1^2(\frac{1}{2}u, i\sqrt{q})}{(2\lambda - f_{,,}^{0})\vartheta_1^2(\frac{1}{2}u, i\sqrt{q}) + \mu\vartheta_2^2(\frac{1}{2}u, i\sqrt{q})}\,, \qquad X = \lambda + \frac{m^2}{4\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\varphi}\,.$$

Zur numerischen Berechnung der Argumente q und u kann man sich bekanntlich verschiedener Methoden bedienen, welche sich zumeist auf die Transformation des Gauß'schen arithmetisch-geometrischen Mittels gründen. Sei

$$m_1 = \frac{m+n}{2}\,, \qquad n_1 = \sqrt{mn}\,, \qquad m_2 = \frac{m_1 + n_1}{2}\,, \qquad n_2 = \sqrt{m_1 n_1}\,, \qquad \text{usw.}\,,$$

so setze man

$$\mathfrak{l} = \lg\frac{m}{n}\,, \qquad \lambda = \lg\left(1 + \frac{n}{m}\right), \qquad \mathfrak{l}_1 = \lg\frac{m_1}{n_1} = \frac{1}{2}\mathfrak{l} + \lambda - \lg 2\,,$$

$$\lambda_1 = \lg\left(1 + \frac{n_1}{m_1}\right), \qquad \mathfrak{l}_2 = \lg\frac{m_2}{n_2} = \frac{1}{2}\mathfrak{l}_1 + \lambda_1 - \lg 2\,, \quad \text{usw.}$$

Dann wird für das Argument des Moduls:

$$\lg q = 2\lg\frac{\varkappa}{4} + \mathfrak{l} - \frac{3}{2}\left(\mathfrak{l}_1 + \frac{1}{2}\mathfrak{l}_2 + \frac{1}{4}\mathfrak{l}_3 + \frac{1}{8}\mathfrak{l}_4 \ldots\right),$$

nebst

$$\lg\vartheta = -\frac{1}{4}(\mathfrak{l} + \mathfrak{l}_1 + \mathfrak{l}_2 + \mathfrak{l}_3 \ldots)\,,$$

$$\lg\vartheta_2 = \frac{1}{2}\lg\varkappa + \frac{1}{4}(\mathfrak{l} - \mathfrak{l}_1 - \mathfrak{l}_2 - \mathfrak{l}_3 \ldots)\,,$$

$$\lg\vartheta_3 = \frac{1}{4}(\mathfrak{l} - \mathfrak{l}_1 - \mathfrak{l}_2 - \mathfrak{l}_3 \ldots)\,.$$

Da ferner für $\varphi + \psi = \frac{\pi}{2}$:

$$m\operatorname{tg}^2\psi = n\operatorname{tg}^2\frac{\psi_1}{2}\,, \qquad m_1\operatorname{tg}^2\psi_1 = n_1\operatorname{tg}^2\frac{\psi_2}{2}\,, \quad \text{usw.}$$

$$\lg\operatorname{tg}\psi + \frac{1}{2}\mathfrak{l} = \lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}\psi_1\,, \qquad \lg\operatorname{tg}\psi_1 + \frac{1}{2}\mathfrak{l}_1 = \lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}\psi_2 \ldots,$$

so wird

$$\frac{\pi}{2} - u = M \int\limits_0^{\psi} \frac{d\varphi}{\sqrt{m^2 \sin^2 \varphi + n^2 \cos^2 \varphi}} = \frac{1}{2} M \int\limits_0^{\psi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{m_1^2 \sin^2 \varphi + n_1^2 \cos^2 \varphi}}$$

$$= \frac{1}{4} M \int\limits_0^{\psi_2} \frac{d\varphi}{\sqrt{m_2^2 \sin^2 \varphi + n_2^2 \cos^2 \varphi}} \cdots = \lim_{p=\infty} \frac{1}{2^p} \psi_p ,$$

und es ist dadurch auch das Argument der Amplitude bestimmt.[1])

39.

Wir wenden uns jetzt zur Betrachtung des Falles, in welchem ξ_1^0 und η_1^0 *gleichzeitig* verschwinden, also $f x_0 = \mathfrak{f} y_0 = 0$ ist. Alsdann wird die Substitution $X = Y$ zugleich *rational* und *linear*, und man erhält das folgende Formelsystem:

$$\frac{f_{\prime}^0}{x - x_0} + \frac{1}{2} f_{\prime\prime}^0 = \frac{\mathfrak{f}_{\prime}^0}{y - y_0} + \frac{1}{2} \mathfrak{f}_{\prime\prime}^0 ,$$

oder

$$f_{\prime}^0 \mathfrak{f}_{\prime}^0 = \Big((f_{\prime\prime}^0 - \mathfrak{f}_{\prime\prime}^0)(x - x_0) + 2 f_{\prime}^0\Big)\Big((\mathfrak{f}_{\prime\prime}^0 - f_{\prime\prime}^0)(y - y_0) + 2 \mathfrak{f}_{\prime}^0\Big) ,$$

$$\frac{\xi_1 \xi_2^0}{x - x_0} = \varepsilon \frac{\eta_1 \eta_2^0}{y - y_0} , \qquad \frac{f_{\prime}^0 \xi}{(x - x_0)^2} = \varepsilon \frac{\mathfrak{f}_{\prime}^0 \eta}{(y - y_0)^2} ,$$

$$\frac{L^0 x_0 + M^0}{(x - x_0)^2} \xi = \varepsilon \frac{\mathfrak{L}^0 y_0 + \mathfrak{M}^0}{(y - y_0)^2} \eta ,$$

$$x - x_0 = \frac{(L^0 x_0 + M^0)(y - y_0)}{\frac{1}{2}(\mathfrak{L}^0 - L^0)(y - y_0) + \mathfrak{L}^0 y_0 + \mathfrak{M}^0} ,$$

$$y - y_0 = \frac{(\mathfrak{L}^0 y_0 + \mathfrak{M}^0)(x - x_0)}{\frac{1}{2}(L^0 - \mathfrak{L}^0)(x - x_0) + L^0 x_0 + M^0} ,$$

$$\xi_1 = \varepsilon \eta_1 \frac{\eta_2^0}{\xi_2^0} \cdot \frac{L^0 x_0 + M^0}{\frac{1}{2}(\mathfrak{L}^0 - L^0)(y - y_0) + \mathfrak{L}^0 y_0 + \mathfrak{M}^0} ,$$

$$\xi_2 = \eta_2 \frac{\xi_2^0}{\eta_2^0} \cdot \frac{\mathfrak{L}^0 y_0 + \mathfrak{M}^0}{\frac{1}{2}(\mathfrak{L}^0 - L^0)(y - y_0) + \mathfrak{L}^0 y_0 + \mathfrak{M}^0} ,$$

$$\xi = \varepsilon \eta \cdot \frac{(L^0 x_0 + M^0)(\mathfrak{L}^0 y_0 + \mathfrak{M}^0)}{\left(\frac{1}{2}(\mathfrak{L}^0 - L^0)(y - y_0) + \mathfrak{L}^0 y_0 + \mathfrak{M}^0\right)^2} ,$$

$$\eta_1 = \varepsilon \xi_1 \frac{\xi_2^0}{\eta_2^0} \cdot \frac{\mathfrak{L}^0 y_0 + \mathfrak{M}^0}{\frac{1}{2}(L^0 - \mathfrak{L}^0)(x - x_0) + L^0 x_0 + M^0} ,$$

$$\eta_2 = \xi_2 \frac{\eta_2^0}{\xi_2^0} \cdot \frac{L^0 x_0 + M^0}{\frac{1}{2}(L^0 - \mathfrak{L}^0)(x - x_0) + L^0 x_0 + M^0} ,$$

$$\eta = \varepsilon \xi \cdot \frac{(L^0 x_0 + M^0)(\mathfrak{L}^0 y_0 + \mathfrak{M}^0)}{\left(\frac{1}{2}(L^0 - \mathfrak{L}^0)(x - x_0) + L^0 x_0 + M^0\right)^2} .$$

---

1) S. 135 meiner Abhandlung *zur Reduktion elliptischer Integrale* ist Z. 8 v. o. $\cot \varphi$ statt $\operatorname{tg} \varphi$ zu lesen.

Die vorsteheuden Formeln erfahren eine weitere Vereinfachung, wenn y_0 verschwindet oder unendlich wird, mit anderen Worten, für $\mathfrak{E} = 0$ oder $\mathfrak{A} = 0$. Da beide Fälle auseinander hervorgehen, wenn man $\frac{1}{y}$ statt y setzt und $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$ vertauscht, so beschränken wir uns hier auf die Transformation

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\xi} = \varepsilon \int_{y}^{\infty} \frac{dy}{\eta}$$

und bemerken, daß zur *direkten* Ableitung aus den allgemeinen Formeln der linearen Substitution, für $\mathfrak{A} = 0$, $y_0 = \infty$,

$$\mathfrak{f}y = \left(1 - \frac{y}{y_0}\right)(4\mathfrak{B}y^3 + 6\mathfrak{C}y^2 + 4\mathfrak{D}y + \mathfrak{E})$$

zu setzen ist. Man erhält:

$$\frac{f_{\prime}^{0}}{x - x_0} + \frac{1}{2} f_{\prime\prime}^{0} = \mathfrak{B}y + \frac{1}{2}\mathfrak{C} = \frac{L^0 x_0 + M^0}{x - x_0} + \frac{1}{2} L^0$$

$$= \frac{1}{2(x - x_0)}\left(L^0 x - \frac{N^0}{x_0}\right),$$

$$\eta_1^2 = 4\mathfrak{B}y + 2(\mathfrak{C} - 2\lambda), \qquad \eta_2^2 = y^2 + \frac{\mathfrak{C} + \lambda}{\mathfrak{B}} y + \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C} - 2\lambda},$$

$$x - x_0 = 2\frac{L^0 x_0 + M^0}{2\mathfrak{B}y + \mathfrak{C} - L^0}, \qquad y = \frac{L^0 x_0 + M^0}{\mathfrak{B}(x - x_0)} + \frac{L^0 - \mathfrak{C}}{2\mathfrak{B}},$$

$$\eta_1 = \frac{\varepsilon \xi_2^0 \xi_1}{x - x_0}, \qquad \eta_2 = \frac{\xi_2(L^0 x_0 + M^0)}{\mathfrak{B}\xi_2^0 (x - x_0)},$$

$$\xi_1 = \varepsilon \frac{2\eta_1}{\xi_2^0} \cdot \frac{L^0 x_0 + M^0}{2\mathfrak{B}y + \mathfrak{C} - L^0}, \qquad \xi_2 = 2\mathfrak{B}\xi_2^0 \cdot \frac{\eta_2}{2\mathfrak{B}y + \mathfrak{C} - L^0},$$

$$\eta = \varepsilon\xi \cdot \frac{L^0 x_0 + M^0}{\mathfrak{B}(x - x_0)^2}, \qquad \xi = 4\varepsilon\mathfrak{B}\eta \cdot \frac{L^0 x_0 + M^0}{(2\mathfrak{B}y + \mathfrak{C} - L^0)^2}.$$

40.

Da jetzt ξ und η gleichzeitig verschwinden, so müssen die sämtlichen Wurzeln von f und $\mathfrak{f}$ einander zugeordnet, und sofern die lineare Substitution *als reell vorausgesetzt* werden soll, gleichzeitig reell oder komplex sein. Aus der Gleichheit der Invarianten folgt, daß für $G^3 < 27H^2$ ξ und η ein reelles und ein komplexes Wurzelpaar besitzen, während für $G^3 > 27H^2$ unentschieden bleibt, ob zwei reelle oder zwei komplexe Wurzelpaare stattfinden. Eine lineare Substitution, welche vier reelle Wurzeln in zwei konjugierte Paare überführt, oder umgekehrt, kann je-

doch trotz der Unveränderlichkeit der Invarianten nicht reell sein, so daß der Fall, wo ξ vier reelle und η vier komplexe Wurzeln besitzt, oder umgekehrt, hier auszuschließen ist.

Eine lineare Substitution von der Form

$$axy + bx + cy + d = 0\,, \qquad ad - bc = \pm 1$$

läßt die Invarianten ungeändert. Setzt man

$$\xi\xi = A(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\,,$$

$$\eta\eta = \mathfrak{A}(y - y_0)(y - y_1)(y - y_2)(y - y_3)\,,$$

wo

$$\mathfrak{A} = A(c + ax_0)(c + ax_1)(c + ax_2)(c + ax_3)\,,$$

so sind neben $ad - bc = \pm 1$ die vier Gleichungen

$$ax_i y_i + bx_i + cy_i + d = 0$$

zu erfüllen, folglich muß die Determinante

$$\varDelta = | x_i y_i, \quad x_i, \quad y_i, \quad 1 |$$

verschwinden. Diese Bedingung liefert

$$(x_0 - x_1)(x_2 - x_3)(y_0 y_1 + y_2 y_3) + (x_0 - x_2)(x_3 - x_1)(y_0 y_2 + y_1 y_3) + \\ + (x_0 - x_3)(x_1 - x_2)(y_0 y_3 + y_1 y_2) = 0$$

oder

$$\frac{x_0 - x_2}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} = \frac{y_0 - y_2}{y_0 - y_1} \cdot \frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3}\,,$$

mit anderen Worten, das *Doppelverhältnis* der vier Wurzeln bleibt infolge linearer Transformation invariant (vgl. Art. 3). Wenn $y_0 y_1$ nebst $y_2 y_3$ konjugierte Werte haben, so ist diese Gleichung reell, ebenso wie $\mathfrak{A}$ und die übrigen Koeffizienten in η, während allerdings $abcd$ nicht reell sein können, weil die lineare Substitution reelle Wurzeln in komplexe verwandelt hat.

Anders verhält es sich, wenn allein $y_0 = z_0 + z_1 i$ und $y_1 = z_0 - z_1 i$ komplex sind. Dann zerfällt die Gleichung $\varDelta = 0$ in zwei, nämlich

$$(1) \qquad y_2 y_3 - (y_2 + y_3) z_0 + z_0^2 + z_1^2 = 0\,,$$

und

$$(2) \qquad (x_0 - x_2 \cdot x_1 - x_3) + (x_0 - x_3 \cdot x_1 - x_2) = -\frac{12\lambda}{A} = 0\,.$$

Folglich müssen jetzt die Invarianten $H = \mathfrak{H}$ verschwinden und außerdem die Gleichung (1) erfüllt sein. Dadurch wird aber der Wert von $\mathfrak{A}$ *rein*

imaginär, d. h. die Gleichung $G = \mathfrak{G}$ kann nur stattfinden, wenn die Koeffizienten in η^2 rein imaginäre Werte haben. Läßt man den Faktor i fort, so erhalten G und $\mathfrak{G}$ entgegengesetzte Vorzeichen, mithin auch $G^3 - 27H^2$ und $\mathfrak{G}^3 - 27\mathfrak{H}^2$, wodurch der scheinbare Widerspruch gehoben wird, der darin liegt, daß eine lineare Substitution, durch welche ein reelles und ein konjugiertes Wurzelpaar in vier reelle Wurzeln, oder in zwei konjugierte Paare verwandelt werden, die Invarianten nicht ändern soll, während die Ungleichung $G^3 > 27H^2$ in $\mathfrak{G}^3 < 27\mathfrak{H}^2$ übergeht.[1])

41.

Setzt man

$$\xi_1\xi_1 = l_1(x - x_0)(x - x_1), \qquad \eta_1\eta_1 = \mathfrak{l}_1(y - y_0)(y - y_1),$$

so ändert sich die betrachtete lineare Substitution nicht, wenn man in den Formeln des Art. 39 x_0 und y_0 mit x_1 und y_1 vertauscht. Es geht dies aus der Relation

$$l_1\xi_2^0\xi_2^1 = \mathfrak{l}_1\eta_2^0\eta_2^1 = 2\mu$$

des Art. 38 hervor, vermöge deren

$$\frac{\xi_1\xi_1\xi_2^0\xi_2^1}{(x-x_0)(x-x_1)} = \frac{\eta_1\eta_1\eta_2^0\eta_2^1}{(y-y_0)(y-y_1)} \qquad \text{oder} \qquad \frac{\xi_1\xi_2^1}{x-x_1} = \varepsilon\frac{\eta_1\eta_2^1}{y-y_1}$$

wird. Durch Verbindung mit der früheren Gleichung erhält man die symmetrische Formel

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}\cdot\frac{\xi_2^0}{\eta_2^0} = \frac{y-y_1}{x-x_1}\cdot\frac{\xi_2^1}{\eta_2^1}.$$

Wenn hier $x_0 x_1$ und $y_0 y_1$ *konjugierte* Wurzelpaare sind, so nimmt diese Formel die Gestalt an $P + Qi = P - Qi$ oder $Q = 0$.

---

1) Als Beispiel diene

$$x_0 = \frac{7}{5},\quad x_1 = 1,\quad x_2 = 2,\quad x_3 = 3,\quad y_0 = \frac{87}{8},\quad y_1 = 1,\quad y_2 = 4 + 5i,\quad y_3 = 4 - 5i,$$

$$\xi\xi = \frac{1}{12}A(12x^4 - 4\cdot 25x^3 + 6\cdot 50x^2 - 4\cdot 95x + 168),$$

$$\eta\eta = \frac{1}{8}\mathfrak{A}(3y^4 - 4\cdot 16y^3 + 6\cdot 80y^2 - 4\cdot 484y + 1517),$$

$$G = \frac{1}{9}A^2,\quad H = 0,\quad \mathfrak{G} = -\left(\frac{85}{3}\mathfrak{A}\right)^2,\quad \mathfrak{H} = 0,$$

folglich

$$A^2 + (85\mathfrak{A})^2 = 0,\quad a = \frac{6-9i}{\sqrt{340}},\qquad b = \frac{11+26i}{\sqrt{340}},$$

$$ad - bc = 1,\quad c = \frac{-16+19i}{\sqrt{340}},\quad d = \frac{-1-36i}{\sqrt{340}}.$$

Aus der gefundenen Gleichung lassen sich die Radikale entfernen, wenn man die Relation

$$l_1 \frac{\xi_2^0}{\eta_2^0} = \mathfrak{l}_1 \frac{\eta_2^1}{\xi_2^1} \qquad \text{oder} \qquad l_1 \frac{\xi_2^1}{\eta_2^1} = \mathfrak{l}_1 \frac{\eta_2^0}{\xi_2^0}$$

benutzt. Dann wird

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{l_1}{\mathfrak{l}_1} \cdot \frac{\xi_2^1 \xi_2^1}{\eta_2^1 \eta_2^1} \cdot \frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{\mathfrak{l}_1}{l_1} \cdot \frac{\eta_2^0 \eta_2^0}{\xi_2^0 \xi_2^0} \cdot \frac{y-y_1}{x-x_1},$$

so daß man nach Belieben schreiben kann:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} \sqrt{\frac{l_2 x_0^2 + 2 m_2 x_0 + n_2}{\mathfrak{l}_2 y_0^2 + 2 \mathfrak{m}_2 y_0 + \mathfrak{n}_2}} = \frac{y-y_1}{x-x_1} \sqrt{\frac{l_2 x_1^2 + 2 m_2 x_1 + n_2}{\mathfrak{l}_2 y_1^2 + 2 \mathfrak{m}_2 y_1 + \mathfrak{n}_2}},$$

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{l_1}{\mathfrak{l}_1} \cdot \frac{l_2 x_1^2 + 2 m_2 x_1 + n_2}{\mathfrak{l}_2 y_1^2 + 2 \mathfrak{m}_2 y_1 + \mathfrak{n}_2} \cdot \frac{y-y_1}{x-x_1},$$

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{l_1}{\mathfrak{l}_1} \cdot \frac{l_2 x_0^2 + 2 m_2 x_0 + n_2}{\mathfrak{l}_2 y_0^2 + 2 \mathfrak{m}_2 y_0 + \mathfrak{n}_2} \cdot \frac{y-y_0}{x-x_0},$$

oder mit Hilfe der Wurzeln $x_2 x_3$ und $y_2 y_3$:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} \sqrt{\frac{x_0 - x_2 \cdot x_0 - x_3}{y_0 - y_2 \cdot y_0 - y_3}} = \frac{y-y_1}{x-x_1} \sqrt{\frac{x_1 - x_2 \cdot x_1 - x_3}{y_1 - y_2 \cdot y_1 - y_3}},$$

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{A}{\mathfrak{A}} \cdot \frac{x_1 - x_2 \cdot x_1 - x_3}{y_1 - y_2 \cdot y_1 - y_3} \cdot \frac{y-y_1}{x-x_1},$$

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{A}{\mathfrak{A}} \cdot \frac{x_0 - x_2 \cdot x_0 - x_3}{y_0 - y_2 \cdot y_0 - y_3} \cdot \frac{y-y_0}{x-x_0}.$$

Für $A = 0$, $x_k = \infty$ hat man $A x_k = -4B$ zu setzen, weil

$$4B = -A(x_0 + x_1 + x_2 + x_3).$$

Übrigens ist immer festzuhalten, daß das Entsprechen der Wurzeln $x_0 y_0$ und $x_1 y_1$ durch die Gleichung

$$m_1 m_2 - \mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 = C - \mathfrak{C}$$

der Artt. 24 und 36 bedingt ist, damit die Zerlegung von $\xi = \xi_1 \xi_2$ und $\eta = \eta_1 \eta_2$ auf der nämlichen Wurzel λ der kubischen Resolvente beruhe. Die Formeln des Art. 39 besitzen dagegen den Vorzug, daß man neben $x_0 y_0$ die zugeordneten Wurzeln x_1 und y_1 nicht zu kennen braucht.

Die vorstehenden Gleichungen gelten nicht bloß für reelle Werte von $x_1 y_1$, sondern auch dann, wenn $x_0 x_1$ und $y_0 y_1$ *gleichzeitig* konjugierte Wurzelpaare bedeuten; also mit anderen Worten, wenn die Determinanten $m_1^2 - l_1 n_1$ und $\mathfrak{m}_1^2 - \mathfrak{l}_1 \mathfrak{n}_1$ von gleichem Vorzeichen sind. Nun ist aber

$$(m_1^2 - l_1 n_1)(m_2^2 - l_2 n_2) = G - 3\lambda^2 = (\mathfrak{m}_1^2 - \mathfrak{l}_1 \mathfrak{n}_1)(\mathfrak{m}_2^2 - \mathfrak{l}_2 \mathfrak{n}_2)$$

oder

$$\frac{m_1^2 - l_1 n_1}{\mathfrak{m}_1^2 - \mathfrak{l}_1 \mathfrak{n}_1} = \frac{\mathfrak{m}_2^2 - \mathfrak{l}_2 \mathfrak{n}_2}{m_2^2 - l_2 n_2},$$

so daß, was vom ersten Wurzelpaare gilt, bei dem zweiten von selbst erfüllt ist. Sollten aber die Wurzeln von ξ sämtlich reell, von η sämtlich komplex sein, so würde, wie schon hervorgehoben wurde, unser Verfahren keine reelle Substitution liefern.

Die hier entwickelten Formeln für die Theorie der linearen Substitutionen bei der Transformation elliptischer Differentiale, empfehlen sich durch Einfachheit und Durchsichtigkeit. Die *rationalen* Transformationen *zweiten* Grades führen notwendigerweise auf *verschiedene* Invarianten.

42.

Zum Schlusse betrachten wir noch die Substitutionen dritten und vierten Grades

$$w = x - \frac{f}{f_,} = -\frac{Mx+N}{Lx+M} = -\frac{Bx^3+3Cx^2+3Dx+E}{Ax^3+3Bx^2+3Cx+D},$$

und

$$w = \frac{g}{f} = \frac{1}{12}(\xi'\xi' - 2\xi\xi'') = \frac{A_1x^4+4B_1x^3+6C_1x^2+4D_1x+E_1}{Ax^4+4Bx^3+6Cx^2+4Dx+E},$$

welche Hermite zuerst untersucht hat.[1])

Vermöge der ersteren gehen die Kovarianten fg resp. über in

$$\begin{aligned} f(w) &= f - 4f_,\frac{f}{f_,} + 6f_{,,}\left(\frac{f}{f_,}\right)^2 - 4f_{,,,}\left(\frac{f}{f_,}\right)^3 + f_{\mathrm{IV}}\left(\frac{f}{f_,}\right)^4 \\ &= \frac{f}{f_,^4}(Gf^2 - 3g^2) = \mathfrak{f}, \\ g(w) &= g - 4g_,\frac{f}{f_,} + 6g_{,,}\left(\frac{f}{f_,}\right)^2 - 4g_{,,,}\left(\frac{f}{f_,}\right)^3 + g_{\mathrm{IV}}\left(\frac{f}{f_,}\right)^4 \\ &= \frac{1}{f_,^4}(g^3 - 3Hf^2) = \mathfrak{g}, \end{aligned}$$

mithin $Gg + Hf$ in

$$G\mathfrak{g} + H\mathfrak{f} = \frac{g^2}{f_,^4}(Gg - 3Hf).$$

Da nun durch Differentiation erhalten wird:

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{3g}{f_,f_,},$$

so folgt

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 = 9\frac{g^2}{f_,^4} = 9\frac{G\mathfrak{g}+H\mathfrak{f}}{Gg-3Hf},$$

1) *Crelle's Journal* Bd. 52, S. 8 und Bd. 60, S. 304.

oder

$$\frac{dw}{\sqrt{G\mathfrak{g}+H\mathfrak{f}}} = 3\varepsilon \frac{dx}{\sqrt{Gg - 3Hf}},$$

also wenn f für $x = x_0$ verschwindet:

$$\int_{x_0}^{w} \frac{dx}{\sqrt{G\mathfrak{g}+H\mathfrak{f}}} = 3\varepsilon \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{Gg - 3Hf}},$$

ε bedeutet das Vorzeichen von $\dfrac{w - x_0}{x - x_0} = 1 - \dfrac{f}{(x - x_0) f_1}$.

Die umgekehrte Substitution ergibt sich durch Auflösung der kubischen Gleichung

$$(Aw + B)x^3 + 3(Bw + C)x^2 + 3(Cw + D)x + (Dw + E) = 0,$$

deren Invariante durch

$$J_w = -(G\mathfrak{g} + H\mathfrak{f})$$

gegeben ist, während nach dem Früheren

$$J = -(A_1 G + AH)$$

wird. Schreibt man nun

$$2\lambda_w = (Aw + B)x + Bw + C,$$

so hat man

$$4\lambda_w^3 = \mathfrak{G}\lambda_w + \mathfrak{H},$$

$$\mathfrak{G} = 3\left(A_1 w^2 + (BC - AD)w + (C^2 - BD)\right),$$

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{2}\left(i_0 w^3 + (ABC + 3AC^2 - 3B^2C - A^2E)w^2 + \right.$$
$$\left. + (3ABC + 2B^2D - 3BC^2 - 2ABE)w + 3(BCD - B^2E - 2C^3)\right),$$

während als zugehörige Invariante erhalten wird:

$$\mathfrak{J} = -\frac{16}{27}(\mathfrak{G}^3 - 27\mathfrak{H}^2) = 4(Aw + B)^2 J_w.$$

Da nun

$$4\mathfrak{W} = \sqrt{\mathfrak{J}} = 2(Aw + B)\sqrt{J_w},$$

oder

$$\mathfrak{W} = \frac{1}{2}(Aw + B)\sqrt{-(G\mathfrak{g} + H\mathfrak{f})},$$

so folgt zur Bestimmung von x die Gleichung

$$(Aw + B)x + Bw + C = (\mathfrak{H} + \mathfrak{W})^{\frac{1}{3}} + (\mathfrak{H} - \mathfrak{W})^{\frac{1}{3}}.$$

Führt man dagegen die neue Variable

$$w = \frac{g}{f} = \frac{1}{12}(\xi'\xi' - 2\xi\xi'')$$

ein, so gilt nicht allein die Formel

$$\omega^2 = 4w^3 - Gw - H = \left(\frac{1}{12}\xi^2\xi'''\right)^2 = \frac{h^2}{f^3},$$

sondern es wird auch

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{1}{6}\xi\xi''', \qquad \frac{dx}{\xi} = -6\frac{dw}{\xi^2\xi'''},$$

nebst

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\xi} = 6\int_{w}^{\infty}\frac{dw}{\xi^2\xi'''} = \frac{1}{2}\varepsilon\int_{w}^{\infty}\frac{dw}{\omega}.$$

Hier verschwindet ξ für $x = x_0$, und ε bedeutet das Vorzeichen der Differenz $x - x_0$, wenn w als positiv wachsend vorausgesetzt wird.

Die Formeln der umgekehrten Substitution sind bereits Art. 33 entwickelt worden, wonach

$$(Aw - A_1)x + (Bw - B_1) = \frac{1}{2}\omega\,\mathrm{S}\sqrt{\frac{A_1 - A\lambda}{w - \lambda}},$$

wenn das Produkt der in S enthaltenen Radikale das Vorzeichen von i_0 besitzt. Mittelst der Gleichung

$$\xi = -2\varepsilon\omega\frac{dx}{dw}$$

endlich leitet man den Wert ab:

$$\xi = \varepsilon\frac{i_0\omega}{(Aw - A_1)^2} + \varepsilon\frac{A\omega\omega}{(Aw - A_1)^2}\mathrm{S}\sqrt{\frac{A_1 - A\lambda}{w - \lambda}} -$$

$$- \frac{2\varepsilon}{Aw - A_1}\mathrm{S}(2w + \lambda)\sqrt{(A_1 - A\lambda)(w - \lambda)}.$$

Man sieht, daß hier x und ξ *nicht* auf *rationale* Weise von w oder ω abhängen. In der Tat erhält man zufolge des Art. 39 bei Einführung einer Variablen y, für welche

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\xi} = \varepsilon\int_{y}^{\infty}\frac{dy}{\eta} = \varepsilon\int_{w}^{y}\frac{dw}{\omega},$$

$$\eta\eta = 4y^3 - Gy - H, \qquad x - x_0 = 2\frac{L^0 x_0 + M^0}{2y - L^0},$$

neben

$$\eta\omega = 2y(y-w)^2 - (y+w)\left(2yw - \frac{1}{2}G\right) + H,$$

$$= 2y^3 + \frac{1}{2}Gy + H - w\left(6y^2 - \frac{1}{2}G\right),$$

$$= \frac{2y^6 - \frac{5}{2}Gy^4 - 10Hy^3 - \frac{5}{8}G^2y^2 - \frac{1}{2}GHy + \frac{1}{32}G^3 - H^2}{4y^3 - Gy - H}:$$

$$2\frac{y-w}{\sqrt{w-\lambda}} = \frac{\omega}{w-\lambda} + \frac{\eta}{y-\lambda},$$

oder

$$y = w + \frac{1}{2}\omega\,\mathrm{S}\sqrt{\frac{1}{w-\lambda}},$$

$$w = \frac{(y^2 + \frac{1}{4}G)^2 + 2Hy}{4y^3 - Gy - H}.$$

Letztere Substitutionen dienen zur Halbierung resp. Verdoppelung des Integrals

$$u = \int_w^\infty \frac{dw}{\omega} = 2\int_y^\infty \frac{dy}{\eta},$$

wo nach Weierstraß

$$w = \wp(u)$$

die möglich einfachste doppeltperiodische Funktion bezeichnet.

IV. Über Gleichungen fünften und sechsten Grades.

43.

Es ist bereits im Art. 19 angedeutet worden, daß die typische Gleichung auch für $m = 5$ und $m = 6$ etwas näher untersucht werden soll. Wir schicken zunächst einige allgemeinere Betrachtungen voraus.

Die assoziierten Kovarianten ψ_i haben nach Art. 16 die Form

$$
\begin{aligned}
f &= Ax^m + \widehat{m}_1 Bx^{m-1} + \cdots, \\
g &= -\psi_2 = -\frac{1}{2}[ff]_2 = A_1 x^{2m-4} + \cdots, \\
h &= -\psi_3 = 2[fg] = i_0 x^{3m-6} + \cdots, \\
\psi_4 &= \frac{1}{2}[ff]_4 = G x^{2m-8} + \cdots, \\
\psi_5 &= 2[f\psi_4] = k_0 x^{3m-10} + \cdots, \\
\psi_6 &= \frac{1}{2}[ff]_6 = J_{\prime\prime} x^{2m-12} + \cdots, \\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

wo wie früher $n = m\mu - 2p$ geschrieben ist und A_1, G und $J_{\prime\prime}$ für $m = 2$, $m = 4$ und $m = 6$ Invarianten bedeuten. Im Übrigen sind die *ersten* Koeffizienten $A A_1 i_0 G\ k_0 J_{\prime\prime} \ldots$ unabhängig vom Grade m von f (für $i > m$ würde ψ_i keine Bedeutung haben), wie aus der Definition der Kovarianten f_i und ψ_i hervorgeht. In der Tat folgt für $x = 0$

$$f_i(0) = -(i-1)\, a_{m-1}^i + \widehat{i}_2 a_m a_{m-1}^{i-2} a_{m-2} - \widehat{i}_3 a_m^2 a_{m-1}^{i-3} a_{m-3} \cdots + (-1)^i a_m^{i-1} a_{m-i},$$

mithin für den Koeffizienten b_0 von x^n in f_i:

$$b_0 = a_0^{i-1} a_i - i a_0^{i-2} a_i a_{i-1} \pm \cdots + (-1)^i \left(\widehat{i}_2 a_0 a_1^{i-1} a_2 - (i-1)\, a_1^i\right),$$

also unabhängig von m, und vermöge der zwischen den f_i und ψ_i bestehenden Relationen überträgt sich der Satz von selbst auf die Koeffizienten der höchsten Potenzen von x in den assoziierten Kovarianten ψ_i.

Diese Eigenschaft kommt auch gewissen anderen Kovarianten zu, aber keineswegs allen, so daß es angezeigt erscheint, zur Unterscheidung

eine besondere Benennung zu gebrauchen: es mögen derartige Kovarianten als **permanent**, kürzer als P-Kovarianten bezeichnet werden.

Als einfaches Beispiel betrachten wir für $n = 2m - 4$ und $l = 4m - 12$ die beiden Kovarianten

$$g = -\frac{1}{2}[ff]_2 = f_{,}f_{,} - ff_{,,} = A_1 x^n + nB_1 x^{n-1} + \hat{n}_2 C_1 x^{n-2} + \cdots,$$

und

$$-2[gg]_2 = 4(g_{,}g_{,} - gg_{,,}) = b_0 x^l + l b_1 x^{l-1} + \hat{l}_2 b_2 x^{l-2} + \cdots,$$

dann findet man leicht

$$A_1 = B^2 - AC, \qquad B_1 = \frac{1}{2}(BC - AD),$$

$$C_1 = \frac{1}{2(n-1)}\Big((m-1)C^2 - 2BD - (m-3)AE\Big),$$

nebst

$$b_0 = 4(B_1^2 - A_1C_1) = (BC - AD)^2 -$$

$$-\frac{2}{2m-5}(B^2 - AC)\Big((m-1)C^2 - 2BD - (m-3)AE\Big).$$

Während A_1 und B_1 von m unabhängig sind, nimmt b_0 mit C_1 verschiedene Werte an: für $m = 3$ wird $b_0 = J$, für $m = 4$ folgt

$$b_0 = \frac{1}{3}\Big(3A^2D^2 - 2A^2CE + 2AB^2E - 10ABCD +$$

$$+ 6AC^3 + 4B^3D - 3B^2C^2\Big)$$

usw. Die Kovariante $[gg]_2$ gehört also *nicht*, wie g zu den permanenten.

Dagegen ist man berechtigt, eine P-Kovariante von der Form

$$j = Jx^l + lJ_1 x^{l-1} + \hat{l}_2 J_2 x^{l-2} + \cdots$$

zu bilden, indem man die Koeffizienten J_k durch die Differentialgleichungen des Art. 8 aus J ableitet. Denn da nicht allein

$$\mathrm{S}\, i a_{i-1}\frac{\partial b_0}{\partial a_i} = 0, \quad \text{sondern auch} \quad (l-k)b_{k+1} = \mathrm{S}\,(m-i)a_{i+1}\frac{\partial b_k}{\partial a_i},$$

so hat man

$$\mathrm{S}\, i a_{i-1}\frac{\partial J}{\partial a_i} = 0 \qquad \text{und} \qquad (l-k)J_{k+1} = \mathrm{S}\,(m-i)a_{i+1}\frac{\partial J_k}{\partial a_i}.$$

Cayley bezeichnet derartige von m unabhängige Koeffizienten $b_0 = J$ als *Semiinvarianten.*

Auch der **Hermite**'sche Satz gibt das Mittel an die Hand, um die Kovariante j zu finden. Denn da für $b_0 = \mathfrak{F}(a_0 a_1 \cdots a_{m-1} a_m)$, die Kovariante $g = b_0 x^n + \cdots$ die Gleichung erfüllt

$$f^{\nu-\mu} g x = \mathfrak{F}(1 0 f_2 \cdots f_m),$$

so folgt nach Einführung der ψ_i:

$$f^{p-\mu} g x = \Phi(f \psi_2 \psi_3 \cdots \psi_m) .$$

Die Kovariante Φ ist also durch $f^{p-\mu}$ teilbar und für den Koeffizienten der höchsten Potenz von x hat man

$$A^{p-\mu} b_0 = \Phi(A A_1 i_0 G\, k_0 J_{\prime\prime} \cdots) .$$

Wenden wir dies auf die gesuchte Kovariante

$$j = J x^{4m-12} + \cdots$$

an, so ergibt sich wegen

$$b_0 = J = A^2 D^2 - 6ABCD + 4AC^3 + 4B^3 D - 3B^2 C^2 ,$$

$$f^2 j = f_3^2 + 4 f_2^3 = h^2 - 4g^3 , \qquad \text{nebst} \qquad A^2 J = i_0^2 - 4 A_1^3 .$$

Die Differenz $4g^3 - h^2$ besitzt also den Faktor f^2. Etwas allgemeiner werden die Ausdrücke

$$\varphi_i = (2i-1) f_i^2 + (i-1)^2 f_{2i} \qquad \text{und} \qquad \chi_i = i^i f^{i+1} + (i-1)^{i+1} f_{i+1}^i$$

durch f^2 teilbar. Auch stellt sich heraus, daß die Kovarianten von den Gewichten 7 und resp. 10

$$\psi_2 \psi_5 - \psi_3 \psi_4 = f f_0 \qquad \text{und} \qquad \psi_5^2 + 4 \psi_2 \psi_4^2 = f \mathfrak{f}$$

durch f teilbar sind, mithin drücken für $m > 4$ auch

$$f_0 = A_0 x^{4m-14} + \cdots \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{f} = \mathfrak{A} x^{5m-20} + \cdots$$

permanente Kovarianten vierter und fünfter Dimension aus, für welche

$$A A_0 = G i_0 - A_1 k_0 \qquad \text{und} \qquad A \mathfrak{A} = k_0^2 - 4 A_1 G^2$$

werden.

44.

In analoger Weise bestimmt man die permanente Kovariante

$$h' = H x^{3m-12} + \cdots ,$$

welche für $m = 4$ die Invariante

$$H = -\frac{1}{3}[fg]_4 = ACE - AD^2 - B^2 E + 2BCD - C^3 = \begin{vmatrix} A & B & C \\ B & C & D \\ C & D & E \end{vmatrix}$$

darstellt.[1]) Daraus entspringt die Gleichung

$$f^3 h' = f_2 f_4 - f_3^2 - f_2^3 = 4g^3 - h^2 - f^2 g \psi_4 ,$$

1) $[fg]_4$ ist so wenig wie $[gg]_2$ eine permanente Kovariante.

oder

$$4g^3 - h^2 = f^2(fh' + g\psi_4) \,,$$

und durch Verbindung mit dem Ausdruck für $f^2 j$:

$$j + fh' + g\psi_4 = 0 \qquad \text{nebst} \qquad J + AH + A_1 G = 0 \,.$$

Für $m = 4$ und $j = -j_4$ folgt hieraus wie Art. 23

$$j_4 = fH + gG = -Jx^4 + \cdots.$$

Auf demselben Wege ergeben sich für $m = 5$ die P-Kovarianten:

$$j = -j_8 \,, \qquad h' = h_3 \,, \qquad \psi_4 = g_2 \,,$$

$$j_8 = fh_3 + gg_2 = -Jx^8 + \cdots \,,$$

sowie für $m = 6$ die permanenten Ausdrücke:

$$j = -j_{12} \,, \qquad h' = h_6 \,, \qquad \psi_4 = g_4 \,,$$

$$j_{12} = fh_6 + gg_4 = -Jx^{12} + \cdots \,.$$

Man kann die vorstehende Gleichung

$$4g^3 - h^2 = -f^2 j = f^2(fh' + g\psi_4)$$

sowohl wie bei der kubischen Gleichung in der Form schreiben:

$$g^3 = \frac{1}{4}(h^2 - f^2 j) = \frac{h + f\sqrt{j}}{2} \cdot \frac{h - f\sqrt{j}}{2} \,,$$

als wie bei der biquadratischen Gleichung in der Gestalt:

$$h^2 = 4g^3 - f^2 g\psi_4 - f^3 h' = 4\prod(g - \lambda f) \,,$$

wenn

$$4\lambda^3 = \psi_4 \lambda + h'$$

gesetzt wird. Es folgt daraus dem Früheren analog

$$\prod(v - g + \lambda f) = v^3 - 3gv^2 + \left(3g^2 - \frac{1}{4}f^2\psi_4\right)v - \frac{1}{4}h^2 \,,$$

und neben dem Produkt

$$\prod\sqrt{g - \lambda f} = \frac{1}{2}h \,,$$

genügt die Summe

$$\sum\sqrt{g - \lambda f} = z$$

der biquadratischen Gleichung

$$z^4 = 6gz^2 + 4hz + 3g^2 - f^2\psi_4 \,.$$

Dagegen bleiben jetzt die einzelnen Faktoren $\left(\frac{h \pm f\sqrt{j}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$, sowie $\sqrt{g - \lambda f}$ irrational.

Später werden wir noch für $m = 5$ die Invariante

$$K = -2[\psi_4 \psi_4]_2 ,$$

sowie für $m = 6$ die Kovariante

$$h_2 = l_0 x^2 + l_1 x + l_2 = \frac{1}{2} [f \psi_4]_4 ,$$

nebst der Invariante

$$L = [f h']_6 = \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & E \\ C & D & E & F \\ D & E & F & G \end{vmatrix}$$

oder

$$\mathfrak{L} = 6[\psi_4 \psi_4]_4 = J_{\prime\prime} J_{\prime\prime} - 36 L ,$$

$$\Lambda = 70[g g]_8 = J_{\prime\prime} J_{\prime\prime} + 300 L ,$$

zu betrachten haben, um die permanenten Kovarianten abzuleiten:

$$j' = K x^{4m-20} + \cdots ,$$

$$h'' = l_0 x^{3m-16} + \cdots ,$$

und

$$j'' = L x^{4m-24} + \cdots ,$$

während

$$\psi_6^2 - 36 j'' = \mathfrak{L} x^{4m-24} + \cdots ,$$

$$\psi_6^2 + 300 j'' = \Lambda x^{4m-24} + \cdots .$$

45.

Symmetrische Funktionen der Wurzeldifferenzen, welche Kovarianten mit den gegebenen Maßzahlen darstellen, lassen sich auf Grund des Art. 7 ohne Schwierigkeit konstruieren.[1]) Da dies aber nicht ausreicht, um, auch

---

1) Hierbei wird man sich namentlich zu versichern haben, daß die symmetrischen Summen nicht etwa identisch verschwinden. Dies kann z. B. durch einen Faktor $x_i - x_k$ herbeigeführt werden, der bei Vertauschung von i und k in den entgegengesetzten Wert übergeht, zuweilen aber ist die gegenseitige Aufhebung der Summenglieder weniger leicht zu übersehen. So könnte man beispielsweise versucht sein, für $m = 4$ eine Kovariante konstruieren zu wollen von der Form

$$h_2 = \Delta^3 \sum_{12} (x_0 - x_1)^2 (x_0 - x_2)(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x - x_3)^2 ,$$

für $m = 5$ eine Kovariante mit den Maßzahlen 6, 4, 7:

$$j_6 = \Delta^4 \sum_{120} (x_0 - x_1)^2 (x_0 - x_2)^2 (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)(x - x_3)^3 (x - x_4)^3 ,$$

oder für $m = 6$ eine sogenannte schiefe Invariante vom Gewicht 9:

abgesehen von einem numerischen Faktor, deren Identität in Anspruch zu nehmen, so sind nachstehend bei den eine weitere Prüfung erheischenden Gleichungen die betreffenden Kovarianten mit Klammern resp. Sternchen versehen worden:

$$g = \frac{1}{2m\hat{m}_2} A^2 \sum_{\hat{m}_2} (x_0 - x_1)^2 (x - x_2)^2 (x - x_3)^2 \cdots (x - x_{m-1})^2 ,$$

$$h = \frac{1}{3m^2\hat{m}_3} A^3 \sum_{6\hat{m}_3} (x_0 - x_1)^2 (x_0 - x_2)(x - x_1)(x - x_2)^2 (x - x_3)^3 \cdots (x - x_{m-1})^3 ,$$

$$= \frac{1}{2m^2\hat{m}_4} A^3 \sum_{4\hat{m}_4} (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3) \times$$
$$\times (x - x_1)^2 (x - x_2)^2 (x - x_3)^2 (x - x_4)^3 \cdots (x - x_{m-1})^3 ,$$

$$\psi_4 = \frac{1}{4\hat{m}_2\hat{m}_4} A^2 \sum_{3\hat{m}_4} (x_0 - x_1)^2 (x_2 - x_3)^2 (x - x_4)^2 \cdots (x - x_{m-1})^2 ,$$

$$= \frac{1}{2\hat{m}_2\hat{m}_4} A^2 \sum_{3\hat{m}_4} (x_0 - x_1)(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_0)(x - x_4^2) \cdots (x - x_{m-1})^2 ,$$

$$(\psi_5) = * A^3 \sum_{60\hat{m}_4} (x_0 - x_1)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_0 - x_4) \times$$
$$\times (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)^2 (x - x_5)^3 \cdots (x - x_{m-1})^3 ,$$

$$= * A^3 \sum_{60\hat{m}_4} (x_0 - x_1)^2 (x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_2 - x_5) \times$$
$$\times (x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)^2 (x - x_4)^2 (x - x_5)^2 (x - x_6)^3 \cdots (x - x_{m-1})^3 ,$$

$$(\psi_6) = * A^2 \sum_{15\hat{m}_4} (x_0 - x_1)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_4 - x_5)^2 (x - x_6)^2 \cdots (x - x_{m-1})^2 ,$$

$$= * A^2 \sum_{60\hat{m}_4} (x_0 - x_1)(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_4)(x_4 - x_5)(x_5 - x_0) \times$$
$$\times (x - x_6)^2 \cdots (x - x_{m-1})^2 .$$ [1]

Um zu prüfen, ob die gegebenen Ausdrücke permanente Kovarianten darstellen, vergleichen wir die Koeffizienten der höchsten Potenzen von x und verifizieren zunächst die Gleichung

$$A_1 = c_m A^2 \sum_{\hat{m}_2} (x_0 - x_1)^2 .$$

$$J_{,,,} = A^3 \sum_{30} (x_0 - x_1)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_4 - x_5)^2 (x_1 - x_2)(x_3 - x_4)(x_5 - x_0) ,$$

Ausdrücke, die sich gleichwohl bei näherer Betrachtung als verschwindend herausstellen.

1) Allerdings kann der Verfasser den Vorwurf nicht als unberechtigt ablehnen, daß er früher versäumt hat, einige der symmetrischen Summenausdrücke hier und im Folgenden auf ihre Richtigkeit und Vollständigkeit zu prüfen, und dies jetzt dem geneigten Leser zu überlassen genötigt ist.

Man erhält leicht wegen

$$B = -\frac{1}{m} A \mathrm{S} x_0 , \qquad C = \frac{1}{\widehat{m}_2} A \mathrm{S} x_0 x_1 :$$

$$A_1 = A^2 \left(\frac{1}{m^2} (\mathrm{S} x_0)^2 - \frac{1}{\widehat{m}_2} \mathrm{S} x_0 x_1\right) = A^2 \left(\frac{1}{m^2} \mathrm{S} x_0^2 - \frac{1}{m \widehat{m}_2} \mathrm{S} x_0 x_1\right) ,$$

neben

$$\sum_{\widehat{m}_2} (x_0 - x_1)^2 = (m-1) \mathrm{S} x_0^2 - 2 \mathrm{S} x_0 x_1 .$$

Damit folgt für beliebige Werte von m im Ausdruck für g:

$$c_m = \frac{1}{2 m \widehat{m}_2} .$$

Für die Kovariante h wird die Gleichung

$$i_0 = c'_m A^3 \sum_{6\widehat{m}_3} (x_0 - x_1)^2 (x_0 - x_2) = c''_m A^3 \sum_{4\widehat{m}_4} (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)$$

zu untersuchen sein. Offenbar hat man

$$i_0 = A^3 \left(\frac{2}{m^3} (\mathrm{S} x_0)^3 - \frac{3}{m \widehat{m}_2} \mathrm{S} x_0 \mathrm{S} x_0 x_1 + \frac{1}{\widehat{m}_3} \mathrm{S} x_0 x_1 x_2\right) ,$$

$$= A^3 \left(\frac{2}{m^3} \mathrm{S} x_0^3 - \frac{3}{m^2 \widehat{m}_2} \mathrm{S} x_0^2 x_1 + \frac{4}{m^2 \widehat{m}_3} \mathrm{S} x_0 x_1 x_2\right) ,$$

$$\sum_{6\widehat{m}_3} (x_0 - x_1)^2 (x_0 - x_2) = (m-1)(m-2) \mathrm{S} x_0^3 - 3(m-2) \mathrm{S} x_0^2 x_1 + 12 \mathrm{S} x_0 x_1 x_2 ,$$

$$\sum_{4\widehat{m}_4} (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3) = \frac{1}{6} (m-1)(m-2)(m-3) \mathrm{S} x_0^3 -$$
$$- \frac{1}{2} (m-2)(m-3) \mathrm{S} x_0^2 x_1 + 2(m-3) \mathrm{S} x_0 x_1 x_2 ,$$

mithin

$$c'_m = \frac{1}{3 m^2 \widehat{m}_3} , \qquad c''_m = \frac{1}{2 m^2 \widehat{m}_4} .$$

Für die Kovariante ψ_4 erhält man analog:

$$G = c'_m A^2 \sum_{3\widehat{m}_4} (x_0 - x_1)^2 (x_2 - x_3)^2 = c''_m A^2 \sum_{3\widehat{m}_4} (x_0 - x_1)(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_0) ,$$

wo

$$G = A^2 \left(\frac{3}{\widehat{m}_2^2} (\mathrm{S} x_0 x_1)^2 - \frac{4}{m \widehat{m}_3} \mathrm{S} x_0 \mathrm{S} x_0 x_1 x_2 + \frac{1}{\widehat{m}_4} \mathrm{S} x_0 x_1 x_2 x_3\right) ,$$

$$= A^2 \left(\frac{3}{\widehat{m}_2^2} \mathrm{S} x_0^2 x_1^2 - \frac{2}{\widehat{m}_2 \widehat{m}_3} \mathrm{S} x_0^2 x_1 x_2 + \frac{3}{\widehat{m}_2 \widehat{m}_4} \mathrm{S} x_0 x_1 x_2 x_3\right) ,$$

$$\sum_{3\widehat{m}_4} (x_0 - x_1)^2 (x_2 - x_3)^2 = (m-2)(m-3) \mathrm{S} x_0^2 x_1^2 -$$
$$- 2(m-3) \mathrm{S} x_0^2 x_1 x_2 + 12 \mathrm{S} x_0 x_1 x_2 x_3 ,$$

$$\sum_{3\widehat{m}_4} (x_0 - x_1)(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_0) = \frac{1}{2} (m-2)(m-3) \mathrm{S} x_0^2 x_1^2 -$$
$$- (m-3) \mathrm{S} x_0^2 x_1 x_2 + 6 \mathrm{S} x_0 x_1 x_2 x_3 ,$$

$$c'_m = \frac{1}{4 \widehat{m}_2 \widehat{m}_4} , \qquad c''_m = \frac{1}{2 \widehat{m}_2 \widehat{m}_4} .$$

46.

Die permanenten Kovarianten $g\ h\ \psi_4 \cdots$ sind hierdurch auf symmetrische Summen der Wurzeldifferenzen zurückgeführt. Es fragt sich jetzt, ob die Gleichungen

$$m = 3: \quad J = -\frac{1}{27} A^4 (x_0 - x_1)^2 (x_1 - x_2)^2 (x_2 - x_0)^2 ,$$

$$m = 4: \quad H = \frac{1}{432} A^3 \sum_6 (x_0 - x_1)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_0 - x_2)(x_1 - x_3) ,$$

$$m = 5: \quad K = -\frac{1}{1250} A^4 \sum_{10} (x_0 - x_1)^4 (x_2 - x_3)^2 (x_3 - x_4)^2 (x_4 - x_2)^2 ,$$

$$= -\frac{1}{1250} A^4 \sum_{12} (x_0 - x_1)^2 (x_1 - x_2)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_3 - x_4)^2 (x_4 - x_0)^2 ,$$

$$m = 6: \quad l_0 = * A^3 \sum_{45} (x_0 - x_1)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_4 - x_5)^2 (x_0 - x_2)(x_1 - x_3) ,$$

$$L = \frac{1}{960000} A^4 \sum_{15} (x_0 - x_1)^4 (x_2 - x_3)^4 (x_4 - x_5)^4 ,$$

$$J_{IV} = * A^4 \sum_{45} (x_0 - x_1)^4 (x_2 - x_3)^2 (x_3 - x_4)^2 (x_4 - x_5)^2 (x_5 - x_2)^2 ,$$

$$J_{IV} = * A^4 \sum_{60} (x_0 - x_1)^2 (x_1 - x_2)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_3 - x_4)^2 (x_4 - x_5)^2 (x_5 - x_0)^2 ,$$

in ähnlicher Weise verallgemeinert werden können, um dadurch Ausdrücke für die *permanenten* Kovarianten $j\ h'\ j'\ h''\ j''$ zu gewinnen. Die Gewichte sind $p = 6, 6, 10, 8, 12$, während $J\ H\ K\ L$ Invarianten bedeuten. Die Formeln für J und H ergeben jedoch, daß ihre Gültigkeit schon für $m > 3$ resp. $m > 5$ aufhört.

Dies zu zeigen beschränken wir uns der Einfachheit halber auf die Fälle $D = 0$ resp. $E = 0$, wodurch

$$J = 4AC^3 - 3B^2C^2 = A^4 \left(\frac{4}{\widehat{m}_2^3} (\mathrm{S}\, x_0 x_1)^3 - \frac{3}{m^2 \widehat{m}_2^2} (\mathrm{S}\, x_0)^2 (\mathrm{S}\, x_0 x_1)^2 \right) ,$$

und

$$H = 2BCD - AD^2 - C^3 =$$

$$= A^3 \left(\frac{2}{m \widehat{m}_2 \widehat{m}_3} \mathrm{S}\, x_0 \,\mathrm{S}\, x_0 x_1 \,\mathrm{S}\, x_0 x_1 x_2 - \frac{1}{\widehat{m}_3^2} (\mathrm{S}\, x_0 x_1 x_2)^2 - \frac{1}{\widehat{m}_2^3} (\mathrm{S}\, x_0 x_1)^3 \right) .$$

Sollen nun J und H ausgedrückt werden durch

$$J = c_m A^4 \sum_{\widehat{m}_3} (x_0 - x_1)^2 (x_1 - x_2)^2 (x_2 - x_0)^2 ,$$

und

$$H = c'_m A^3 \sum_{6 \widehat{m}_4} (x_0 - x_1)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_0 - x_2)(x_1 - x_3) ,$$

so kann man mit D auch die folgenden Koeffizienten $EF\ldots$ verschwinden lassen, oder $x_2 = x_3 \cdots = x_{m-1} = 0$ setzen. Dann wird

$$J = \frac{A^4}{\widehat{m}_2^2}\left(4x_0^3 x_1^3 - \frac{3\widehat{m}_2}{m^2}(x_0 + x_1)^2 x_0^2 x_1^2\right) = c_m A^4 (m-2)(x_0 - x_1)^2 x_0^2 x_1^2\,,$$

und hier erhält man für $m = 3$ $c_3 = -\frac{1}{27}$, während für $m > 3$ ein widersprechendes Resultat hervorgeht.

Wir schließen daraus, daß die durch die symmetrische Summe

$$c_m A^4 \sum_{\widehat{m}_3} (x_0 - x_1)^2 (x_1 - x_2)^2 (x_2 - x_0)^2 (x - x_3)^4 \cdots (x - x_{m-1})^4$$

definierte Kovariante nur für $m = 3$ den ersten Koeffizienten J hat, also nicht permanent sein kann. Da wie früher nachgewiesen, die Kovariante $-2[gg]_2$ mit den gleichen Maßzahlen sich ganz analog verhält, so könnte man an eine Identität beider denken, allein der oben bestimmte Koeffizient b_0 reduziert sich für $D = E = 0$ auf

$$B^2 C^2 - \frac{2m-2}{2m-5} C^2 (B^2 - AC) =$$
$$= \frac{A^4}{(2m-5)\widehat{m}_2^2}\left(2(m-1)x_0^3 x_1^3 - \frac{3\widehat{m}_2}{m^2}(x_0 + x_1)^2 x_0^2 x_1^2\right),$$

führt also gleichfalls nur für $m = 3$ auf einen widerspruchsfreien Wert von c_m.

Für Kovarianten mit dem ersten Koeffizienten H läßt sich mit dem gleichen Erfolge der entsprechende Nachweis führen, wenn man

$$0 = E = F \cdots \qquad \text{oder} \qquad x_3 = x_4 \cdots = x_{m-1} = 0$$

setzt. Denn dann wird

$$H = A^3\left(\frac{2}{m\widehat{m}_2\widehat{m}_3} x_0 x_1 x_2 \,\mathrm{S}\, x_0 \,\mathrm{S}\, x_0 x_1 - \frac{1}{\widehat{m}_3^2} x_0^2 x_1^2 x_2^2 - \frac{1}{\widehat{m}_2^3}(\mathrm{S}\, x_0 x_1)^3\right) =$$
$$= \frac{1}{18\widehat{m}_2\widehat{m}_3^2} A^3 \Big(6(m-1)(m-2) x_0 x_1 x_2 \,\mathrm{S}\, x_0 \,\mathrm{S}\, x_0 x_1 -$$
$$- 9m(m-1) x_0^2 x_1^2 x_2^2 - 2(m-2)^2 (\mathrm{S}\, x_0 x_1)^3\Big),$$

während zugleich

$$H = c_m' A^3 \sum_{6\widehat{m}_4} (x_0 - x_1)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_0 - x_2)(x_1 - x_3)\,,$$
$$= (m-3) c_m' A^3 \left(\mathrm{S}(x_0 - x_1)^2 x_2^2 (2x_0 x_1 - x_0 x_2 - x_1 x_2) - (m-4)\,\mathrm{S}\, x_0^3 x_1^3\right)$$

sein soll. Substituiert man die Werte

$$(\mathrm{S}\, x_0 x_1)^3 = \mathrm{S}\, x_0^3 x_1^3 + 3 x_0 x_1 x_2 \,\mathrm{S}\, x_0^2 x_1 + 6 x_0^2 x_1^2 x_2^2\,,$$

$$\mathrm{S}(x_0 - x_1)^2 x_2^2 (2x_0 x_1 - x_0 x_2 - x_1 x_2) = 3 x_0 x_1 x_2 \,\mathrm{S}\, x_0^2 x_1 - 12 x_0^2 x_1^2 x_2^2 - 2\,\mathrm{S}\, x_0^3 x_1^3\,,$$

so folgt:

$$H = \frac{1}{18\,\widehat{m}_2\,\widehat{m}_3^2} A^3 \Big(6(m-2)x_0x_1x_2\,\mathrm{S}\,x_0^2x_1 - 2(m-2)^2\,\mathrm{S}\,x_0^3x_1^3 - \\ - 3(m^2-m+4)x_0^2x_1^2x_2^2\Big)\,,$$

neben

$$H = (m-3)c_m' A^3 \Big(3x_0x_1x_2\,\mathrm{S}\,x_0^2x_1 - (m-2)\,\mathrm{S}\,x_0^3x_1^3 - 12\,x_0^2x_1^2x_2^2\Big)\,,$$

mithin

$$c_m' = \frac{1}{72\,\widehat{m}_2\,\widehat{m}_3\,\widehat{m}_4}\Big(2(m-2) = \frac{1}{4}(m^2-m+4)\Big)\,,$$

und diese Gleichung enthält nur für

$$m = 4\,,\qquad c_4' = \frac{1}{432} \qquad \text{und} \qquad m = 5\,,\qquad c_5' = \frac{1}{6000}$$

keinen Widerspruch.

47.

Die Gleichungen fünften Grades.

Wir gehen zunächst über zu dem Falle

$$m = 5$$

und erhalten für

$$z = \frac{f}{x-y} - \frac{1}{5}f'(x)\,,\qquad y = x - \frac{f}{z+f_1}\,:$$

$$(x-y)z = (Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4Dx + E)y + \\ + Bx^4 + 4Cx^3 + 6Dx^2 + 4Ex + F\,,$$

$$f^4xfy = (x-y)^5(z^5 + 10f_2z^3 + 10f_3z^2 + 5f_4z + f_5)\,.$$

Setzt man aber

$$fy = Ay^5 + 5By^4 + 10Cy^3 + 10Dy^2 + 5Ey + F = 0\,,$$

so wird

$$z = (Ay+B)x^3 + (Ay^2 + 5By + 4C)x^2 - \\ - \Big(4D + 5\frac{E}{y} + \frac{F}{y^2}\Big)x - E - \frac{F}{y}\,,$$

sowie

$$z^5 + 10f_2z^3 + 10f_3z^2 + 5f_4z + f_5 = 0\,,$$

oder wenn die Potenzsummen $\sigma_k = \mathrm{S}_i z_i^k$ eingeführt werden:

$$z^5 = \frac{1}{2}\sigma_2 z^3 + \frac{1}{3}\sigma_3 z^2 + \frac{1}{4}\Big(\sigma_4 - \frac{1}{2}\sigma_2^2\Big)z + \frac{1}{5}\Big(\sigma_5 - \frac{5}{6}\sigma_2\sigma_3\Big)\,.$$

Hier erhält man für die assoziierten Kovarianten f_i resp. ψ_i :[1])

$$f_2 = \psi_2 = \frac{1}{2}[ff]_2 = ff_{\prime\prime} - f_\prime f_\prime\,, \qquad \text{und für} \qquad f_2 = -g\,:$$

$$g = A_1 x^6 + 6B_1 x^5 + 15C_1 x^4 + 20D_1 x^3 + 15E_1 x^2 + 6F_1 x + G_1\,,$$

$$= \frac{1}{100}A^2 \sum_{10}(x_0 - x_1)^2 (x - x_2)^2 (x - x_3)^2 (x - x_4)^2\,,$$

eine Kovariante vom Grade 6, Dimension und Gewicht 2, deren Koeffizienten durch die Ausdrücke gegeben sind:

$$A_1 = B^2 - AC\,, \qquad E_1 = \frac{1}{5}(2D^2 - CE - BF)\,,$$

$$B_1 = \frac{1}{2}(BC - AD)\,, \qquad F_1 = \frac{1}{2}(DE - CF)\,,$$

$$C_1 = \frac{1}{5}(2C^2 - BD - AE)\,, \quad G_1 = E^2 - DF\,,$$

$$D_1 = \frac{1}{20}(8CD - 7BE - AF)\,.$$

Ferner wird

$$f_3 = \psi_3 = 2[f\psi_2] = -2f_\prime^3 + 3ff_\prime f_{\prime\prime} - f^2 f_{\prime\prime\prime}\,,$$

und wenn $h = 2[fg]$, also $f_3 = -h$:

$h = i_0 x^9 + \cdots$, Grad 9, Dimension und Gewicht 3,

$$= \frac{1}{250}A^3 \sum_{20}(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)(x - x_1)^2 (x - x_2)^2 (x - x_3)^2 (x - x_4)^3\,,$$

$$= \frac{1}{750}A^3 \sum_{60}(x_0 - x_1)^2 (x_0 - x_2)(x - x_1)(x - x_2)^2 (x - x_3)^3 (x - x_4)^3\,,$$

$$i_0 = 3ABC - A^2D - 2B^3\,, \quad h(0) = 2E^3 - 3DEF + CF^2\,.$$

Weiter folgt

$$f_4 = f^2\psi_4 - 3\psi_2^2\,,$$

$$\psi_4 = \frac{1}{2}[ff]_4 = ff_{\text{IV}} - 4f_\prime f_{\prime\prime\prime} + 3f_{\prime\prime} f_{\prime\prime} = g_2\,,$$

$g_2 = Gx^2 + 2G'x + G''$, Grad und Dimension 2, Gewicht 4,

$$= \frac{1}{200}A^2 \sum_{15}(x_0 - x_1)^2 (x_2 - x_3)^2 (x - x_4)^2\,,$$

$$= \frac{1}{100}A^2 \sum_{15}(x_0 - x_1)(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_0)(x - x_4)^2\,,$$

---

1) Wir bezeichnen durch $f, g, h, j, k \cdots$ Kovarianten der 1., 2., 3., 4., 5. ⋯ Dimension, während der Grad durch beigefügte Indizes ausgedrückt wird (natürlich mit Ausnahme von f_i und ψ_i, resp. von $f = f_6$, $g = g_6$ und $h = h_9$).

nebst

$$G = AE - 4BD + 3C^2, \qquad G' = AF - 3BE + 2CD,$$
$$G'' = BF - 4CE + 3D^2.$$

Endlich wird

$$f_5 = f^2\psi_5 - 2\psi_2\psi_3,$$

$$\psi_5 = 2[f\psi_4] = -f^2 f_{\mathrm{V}} + 5ff_{\prime}f_{\mathrm{IV}} - 2ff_{\prime\prime}f_{\prime\prime\prime} - 8f_{\prime}^2 f_{\prime\prime\prime} + 6f_{\prime}f_{\prime\prime}^2,$$

oder

$$h_5 = 2[fg_2] = k_0 x^5 + \cdots, \quad \text{Dimension } 3, \text{ Grad und Gewicht } 5,$$
$$= * A^3 \sum_{60} (x_0 - x_1)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_0 - x_4)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)^2,$$

nebst

$$k_0 = A^2F - 5ABE + 2ACD + 8B^2D - 6BC^2.$$

Die *typische* Gleichung für z nimmt nunmehr die Gestalt an:

$$z^5 = 10gz^3 + 10hz^2 + 5(3g^2 - f^2g_2)z + 2gh - f^2h_5,$$

mit der Diskriminante $f^{12}D_5(f)$, während die Potenzsummen die Werte bekommen:

$$\sigma_1 = 0, \qquad \sigma_2 = 20g, \qquad \sigma_3 = 30h,$$
$$\sigma_4 = 20(13g^2 - f^2g_2), \qquad \sigma_5 = 5(102gh - f^2h_5),$$
$$\sigma_6 = 100(29g^3 + 3h^2 - 3f^2gg_2),$$
$$\sigma_7 = 70(117g^2h - 5f^2g_2h - f^2gh_5),$$
$$\sigma_8 = 20(1645g^4 + 408gh^2 - 230f^2g^2g_2 - 4f^2hh_5 + 5f^4g_2^2),$$
$$\cdots\cdots$$

48.

Man kann nun die Invariante zu g_2 berechnen:

$$J_{\mathrm{IV}} = 4(G'G' - GG'') = -2[g_2g_2]_2 = j' = K,$$

Dimension 4, Gewicht 10, und erhält

$$K = A^2F^2 - 10ABEF + 4ACDF + 16ACE^2 - 12AD^2E + 16B^2DF +$$
$$+ 9B^2E^2 - 12BC^2F - 76BCDE + 48BD^3 + 48C^3E - 32C^2D^2,$$
$$= -\frac{1}{1250} A^4 \sum_{12} (x_0 - x_1)^2 (x_1 - x_2)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_3 - x_4)^2 (x_4 - x_0)^2,$$
$$= -\frac{1}{1250} A^4 \sum_{10} (x_0 - x_1)^4 (x_2 - x_3)^2 (x_3 - x_4)^2 (x_4 - x_2)^2.$$

Diese Formel liefert nach dem Hermite'schen Satze:

$$f^6 J_{\text{IV}} = f_5^2 + 4 f_2 f_3 f_5 + 16 f_2 f_4^2 - 12 f_3^2 f_4 + 48 f_2^3 f_4 - 32 f_2^2 f_3^2 \,,$$

welcher Ausdruck jedoch nicht unwesentlich vereinfacht werden kann. Dies geschieht zunächst durch die Einführung der Werte ψ_i oder $g g_2 h h_5$, wodurch der gemeinschaftliche Faktor f^2 wegfällt, so daß

$$f^4 J_{\text{IV}} = f^2 h_5^2 - 16 f^2 g g_2^2 + 48 g^3 g_2 - 12 g_2 h^2 \,.$$

Da aber auch hier das Aggregat der beiden letzten Glieder durch f^2 teilbar sein muß, so dürfen wir durch die Gleichung

$$4 g^3 - h^2 = f^2 j_8$$

eine neue Kovariante vom Grad 8, Dimension 4, Gewicht 6:

$$j_8 = - J x^8 + \cdots = - j$$

einführen, den Resultaten des Art. 44 entsprechend. Damit wird

$$f^2 K = f^2 J_{\text{IV}} = h_5^2 - 16 g g_2^2 + 12 g_2 j_8 \,,$$

nebst

$$A^2 K = k_0^2 - 16 A_1 G^2 - 12 G J \,.$$

Weitere Invarianten werden durch die symmetrischen Summen

$$J_{\text{VIII}} = A^8 \sum_{60} (x_0 - x_1)^6 (x_2 - x_3)^4 (x_2 - x_4)^3 (x_3 - x_4)^3 (x_1 - x_4)^2 (x_0 - x_2)(x_0 - x_3) \,,$$

$$J_{\text{XII}} = A^{12} \sum_{60} (x_0 - x_1)^8 (x_2 - x_3)^6 (x_2 - x_4)^4 (x_3 - x_4)^4 (x_1 - x_4)^4 (x_0 - x_2)^2 (x_0 - x_3)^2 \,,$$

$$J_{\text{XVIII}} = A^{18} \sum_{120} (x_0 - x_1)^{12} (x_2 - x_3)^{10} (x_1 - x_4)^6 (x_3 - x_4)^6 (x_2 - x_4)^5 \times \\ \times (x_0 - x_2)^3 (x_0 - x_3)^2 (x_0 - x_4)$$

definiert und sind von den Dimensionen 8, 12 und 18 nebst den Gewichten 20, 30 und 45, so daß die Produkte $f^{12} J_{\text{VIII}}$, $f^{18} J_{\text{XII}}$ und $f^{27} J_{\text{XVIII}}$ ganzen Funktionen der f_i oder ψ_i gleich werden. J_{XVIII} bezeichnet dann die sogen. *schiefe* Invariante von Hermite, und ihr Quadrat ist durch J_{IV}, J_{VIII} und J_{XII} rational ausdrückbar.

Wir bilden jetzt für unsere Funktion f vom 5. Grade die Kovariante $h' = h_3$ vom Grade und Dimension 3, Gewicht 6, welche durch

$$h_3 = -\frac{5}{12} [f g]_4 = -\frac{1}{8} [f g_2]_2 = H x^3 + 3 H' x^2 + 3 H'' x + H''' \,,$$

$$= \frac{1}{6000} A^3 \sum_{30} (x_0 - x_1)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_0 - x_2)(x_1 - x_3)(x - x_4)^3$$

gegeben ist, wo

$$H = ACE - AD^2 - B^2 E + 2 BCD - C^3 \,,$$

$$3 H' = ACF - ADE - B^2 F + BCE + BD^2 - C^2 D \,,$$

$$3H'' = ADF - AE^2 - BCF + BDE + C^2E - CD^2,$$
$$H''' = BDF - BE^2 - C^2F + 2CDE - D^3.$$

Damit erhält man sogleich, wie bereits Art. 44 angegeben,

$$4g^3 - h^2 = f^2(fh_3 + gg_2) = f^2 j_8,$$

und wenn man in dem oben entwickelten Werte von $f^2 J_{IV}$ j_8 durch h_3 eliminiert:

$$f^2 J_{IV} = 12 f g_2 h_3 - 4 g g_2^2 + h_5^2,$$

mithin auch

$$A^2 K = 12 AGH - 4 A_1 G^2 + k_0^2,$$

und $h_5^2 - 4 g g_2^2$ wird durch f teilbar. Schreibt man daher wie Art. 43

$$\psi_5^2 + 4\psi_2 \psi_4^2 = h_5^2 - 4 g g_2^2 = f\mathfrak{f},$$

so wird $\mathfrak{f} = k_5 = \mathfrak{A}x^5 + \cdots$ eine Kovariante vom Gewicht 10, Grad und Dimension 5, nebst

$$k_0^2 - 4 A_1 G^2 = A\mathfrak{A},$$

$$fK = \mathfrak{f} + 12 g_2 h_3 \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{A} = AK - 12 GH.$$

Die Kovariante h_3 kann man benutzen zur Aufstellung der zugehörigen Invariante J oder

$$J_{XII} = 27\left(H^2 H'''^2 - 6 HH'H''H''' + 4 HH''^3 + 4 H'^3 H''' - 3 H'^2 H''^2\right),$$

die in Bezug auf f auf die Dimension 12 und das Gewicht 30 steigt, und deren 228 Glieder von Faà di Bruno, S. 318 der *Einleitung in die Theorie der binären Formen* (in der Bearbeitung von Noether-Walter), entwickelt worden sind. Für $B = D = 0$ reduziert sich der Ausdruck der Invariante auf die elf Glieder:

$$27 C^{10} F^2 - 4 C^9 E^3 + 16 AC^7 E^4 - 72 AC^8 EF^2 - 24 A^2 C^5 E^5 +$$
$$+ 62 A^2 C^6 E^2 F^2 + 16 A^3 C^3 E^6 - 16 A^3 C^4 E^3 F^2 -$$
$$- 4 A^3 C^5 F^4 - 4 A^4 CE^7 - A^4 C^2 E^4 F^2.$$

49.

Kennt man eine Kovariante von der Form

$$j_4 = A'x^4 + 4B'x^3 + 6C'x^2 + 4D'x + E',$$
$$= * A^4 \sum_{10} (x_0 - x_1)^2 (x_1 - x_2)^2 (x_2 - x_0)^2 (x_3 - x_4)^2 (x - x_3)^2 (x - x_4)^2,$$
$$= * A^4 \sum_{15} (x_0 - x_1)^2 (x_0 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2 (x - x_4)^4,$$

Grad 4, Dimension 4, Gewicht 8, so werden die Invarianten

$$J_{\text{VIII}} = A'E' - 4B'D' + 3C'C'$$

und

$$J_{\text{XII}} = A'C'E' - A'D'^2 - B'^2E' + 2B'C'D' - C'^3$$

Invarianten von f mit den Dimensionen 8 und 12 und den Gewichten 20 und 30, und zwar erhält man

$$J_{\text{VIII}} = \frac{1}{2}[j_4 j_4]_4 ,$$

sowie

$$J_{\text{XII}} = -\frac{1}{3}[j_4 \mathfrak{g}_4]_4 ,$$

wenn

$$\mathfrak{g}_4 = -\frac{3}{2}[j_4 j_4]_2$$

gesetzt wird, also von der achten Dimension ist.

Die Ausdrücke $3[fh_3]_2$ und $2[gg_2]_2$ liefern solche Kovarianten vierten Grades, und man überzeugt sich ohne Schwierigkeit von der Relation

$$j_4 = 3[fh_3]_2 = 2[gg_2]_2 - \frac{3}{5} g_2 g_2 .$$

Hier folgt für die höchsten Koeffizienten:

$$A' = 3(AH'' - 2BH' + CH),$$
$$= 2(A_1 G'' - 2B_1 G' + C_1 G) - \frac{3}{5} G^2,$$

mithin

$$A' = A^2DF - A^2E^2 - 3ABCF + 3ABDE + 4AC^2E - 4ACD^2 +$$
$$+ 2B^3F - 5B^2CE - 2B^2D^2 - 8BC^2D - 3C^4,$$

und folglich auch

$$f^4 j_4 = 4f_2^2 f_4 - 3f_2^4 - 4f_2 f_3^2 + f_3 f_5 - f_4^2 ,$$
$$= 10 f^2 g^2 g_2 - f^4 g_2^2 - 24 g^4 - f^2 h h_5 + 6 g h^2 .$$

Durch Elimination von h^2 (wobei freilich h nicht wegfällt) ergibt sich

$$f^2 j_4 = 4g^2 g_2 - h h_5 - 6 f g h_3 - f^2 g_2^2 ,$$

also ist

$$4g^2 g_2 - h h_5 = f k_9 ,$$

wo

$$k_9 = 6 g h_3 + f(g_2^2 + j_4) = \mathfrak{k}_0 x^9 + \cdots$$

eine Kovariante vom Grade 9, Dimension 5, Gewicht 8, und

$$A\mathfrak{k}_0 = 4A_1^2 G - i_0 k_0 \qquad \text{oder} \qquad \mathfrak{k}_0 = AA' + 6A_1 H + AG^2 .$$

Für die einzelnen Koeffizienten von j_4 gelten die Werte

$$\begin{aligned} A' &= 3(AH'' - 2BH' + CH)\,, \\ 4B' &= 3(AH''' + BH'' - 5CH' + 3DH)\,, \\ 2C' &= 3(BH''' - CH'' - DH' + EH)\,, \\ 4D' &= 3(3CH''' - 5DH'' + EH' + FH)\,, \\ E' &= 3(DH''' - 2EH'' + FH')\,. \end{aligned}$$

Die daraus hervorgehenden, ziemlich weitläufigen Ausdrücke von J_{VIII} und J_{XII} vereinfachen sich für $B = D = 0$, und ergeben dann wegen

$$\begin{aligned} H &= C(AE - C^2)\,, & 3H' &= ACF\,, \\ 3H'' &= E(C^2 - AE)\,, & H''' &= -C^2F\,, \\ A' &= -A^2E^2 + 4AC^2E - 3C^4\,, & B' &= -2AC^2F\,, \\ C' &= 2CE(AE - C^2)\,, & D' &= CF(AE - 3C^2)\,, \end{aligned}$$

$$E' = 2AE^3 + ACF^2 - 2C^2E^2:$$

$$J_{\text{VIII}} = -2A^3E^5 - A^3CE^2F^2 + 22A^2C^2E^4 + 12A^2C^3EF^2 - \\ - 38AC^4E^3 - 27AC^5F^2 + 18C^6E^2\,,$$

während der Wert von J_{XII} von dem bereits oben aus h_8 gefundenen nicht verschieden ist. Die Invariante J_{IV} oder K aber geht im gleichen Falle in den einfacheren Ausdruck über:

$$J_{\text{IV}} = A^2F^2 + 16ACE^2 + 48C^3E\,.$$

Die Diskriminante endlich

$$D_5(f) = \frac{1}{8125}A^8 \prod_{ik}^{*}(x_i - x_k)^2 = \frac{1}{5^5}A^8 S_5 = \frac{1}{5^5}A^8\,|\,s_i s_{i+1} \ldots s_{i+4}\,|\,,$$

$i = 0, 1, 2, 3, 4$, ist als Invariante von der achten Dimension und dem Gewichte 20 durch die Gleichung bestimmt

$$D_5 = J_{\text{IV}}^2 - 128 J_{\text{VIII}}\,,$$ [1])

so daß für $B = D = 0$ der Wert erhalten wird:

$$\begin{aligned} D_5 &= A^4F^4 + 256A^3E^5 + 160A^3CE^2F^2 - 2560A^2C^2E^4 - 1440A^2CE^3F^2 + \\ &\quad + 6400AC^4E^3 + 3456AC^5F^2\,, \\ &= A^4F^4 + 32ACF^2(5A^2E^2 - 45AC^2E + 108C^4) + 256AE^3(AE - 5C^2)^2. \end{aligned}$$

---

1) Überhaupt läßt sich beweisen, daß für $m = 5$ *jede* Invariante durch eine ganze rationale Funktion von *vier* Invarianten mit den Dimensionen 4, 8, 12 und 18 gegeben ist, doch gehen wir der Kürze halber nicht auf eine nähere Erörterung des bekannten Satzes ein.

50.

Die Kovarianten $f g g_2 h_3 j_4$ reichen in Verbindung mit den Invarianten $K = J_{IV}$ und J_{VIII} aus, um die Reihe der Sturm'schen Funktionen, durch deren Zeichenwechsel die Anzahl der konjugierten Wurzelpaare einer Gleichung fünften Grades mit reellen Koeffizienten $f(y) = 0$ bestimmt wird, bequem zu berechnen. In der Tat braucht man nur, da die Wurzeln y und z für reelle Werte von x gleichzeitig reell und (konjugiert) komplex werden, aus den Potenzsummen $\sigma_i = \underset{k}{\mathrm{S}}\, z_k^i$ der Wurzeln z der typischen Gleichung, für $i = 1 \dots 5$, die Determinanten

$$\mathrm{S}_i = \begin{vmatrix} \sigma_0 & \sigma_1 & \dots & \sigma_{i-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma_{i-1} & \sigma_i & \dots & \sigma_{2i-2} \end{vmatrix} = f^{(i-1)(i-2)} T_i$$

zu bilden, und erhält unter Weglassung einfacher positiver Faktoren die Kovariantenreihe

$$1, \quad g, \quad 9 f h_3 + 5 g g_2, \quad 12 g_2 j_4 + 4 g_2^3 - 216 h_3^2 - K g,$$

nebst der Diskriminante $D_5(f) = K^2 - 128 J_{VIII}$.
Die nicht ganz kurze Rechnung bietet keinerlei prinzipielle Schwierigkeit. Der Variablen x kann in diesen Ausdrücken jeder beliebige reelle Wert beigelegt werden.

Von besonderem Interesse sind noch die beiden Kovarianten

$$k_1 = [f g_2^2]_4, \quad \text{mit den Maßzahlen } 1, 5, 12, \quad \text{und}$$

$$j_6 = 3 [f h_3] = 2 [g g_2], \quad \text{mit den Maßzahlen } 6, 4, 7.$$

Die *lineare* Kovariante

$$k_1 = \mathfrak{A}' x + \mathfrak{B}' =$$

$$= * A^5 \sum_{60} (x_0 - x_1)^4 (x_2 - x_3)^2 (x_2 - x_4)^2 (x_3 - x_4)^2 (x_0 - x_2)(x_1 - x_3)(x - x_4)$$

besteht aus zwanzig Gliedern von der Form

$$a_i x + b_i, \qquad A \mathfrak{A}' = 9 H^2 - G^3 - 2 A' G - A_1 K = A\, \mathrm{S}\, a_i.$$

Der Hermite'sche Satz liefert

$$f^7 k_1 = f_2 f_5^2 - 2 f_3 f_4 f_5 + f_4^3 - 2 f_2^2 f_3 f_5 + 14 f_2^2 f_4^2 - 22 f_2 f_3^2 f_4 +$$
$$+ 9 f_3^4 - 15 f_2^4 f_4 + 10 f_2^3 f_3^2,$$

und hieraus durch leichte Rechnung:

$$f k_1 = 9 h_3^2 - g_2^3 - 2 g_2 j_4 - g K.$$

Übrigens erhält man für $B = D = 0$:

$$k_1 = (A^2CF^2 + A^2E^3 + 14\,AC^2E^2 - 15\,C^4)E\,x - \\ - A^2E^2F + 8\,AC^2EF + 9C^4F\,.$$

Die Kovariante sechsten Grades

$$j_6 = A_0 x^6 + \cdots =$$

$$= * A^4 \sum_{120} (x_0 - x_1)^3 (x_2 - x_3)^2 (x_0 - x_2)(x_2 - x_4)(x - x_1)(x - x_3)^2 (x - x_4)^3,$$

ergibt

$$A_0 = 3(AH' - BH) = 2(B_1 G - A_1 G')$$
$$= A^2CF - A^2DE - AB^2F - 2\,ABCE + 4\,ABD^2 - AC^2D + \\ + 3B^3E - 6B^2CD + 3BC^3.$$

Damit wird

$$f^3 j_6 = f_2 f_5 - f_2^2 f_3 - f_3 f_4\,,$$

und nach Einführung von $g g_2 h h_5$:

$$f j_6 = g_2 h - g h_5\,, \qquad A A_0 = G i_0 - A_1 k_0\,,$$

also teilbar durch f resp. A, wie schon Art. 43 erwähnt ist.

51.

In den *Annali di Matematica* von 1883[1]) hat Brioschi den Satz ohne Beweis ausgesprochen, daß, wenn g und h zwei Kovarianten n-ten Grades der Funktion $f(\overset{m}{x}) = a_0 x^m + \cdots$ von den Dimensionen μ und ν bezeichnen, und x aus der Gleichung $f = 0$ mittelst der neuen Variablen

$$\mathfrak{x} = \frac{h}{g}\,, \quad \mathfrak{x}_i = \frac{h(x_i)}{g(x_i)}\,, \quad g^2 d\mathfrak{x} + n[gh]dx = 0$$

eliminiert wird, eine Gleichung von der Form hervorgeht:

$$\mathfrak{A}_0 \mathfrak{x}^m + \mathfrak{A}_1 \mathfrak{x}^{m-1} + \cdots + \mathfrak{A}_m = \mathfrak{f}(\overset{m}{\mathfrak{x}}) = 0\,,$$

in welcher die Koeffizienten $\mathfrak{A}_i$ durch Invarianten der Funktion f ausgedrückt werden. Zur Verifikation findet sich a. a. O. S. 302 für $m = 5$ und $h = j_6$ der Ausdruck $\mathfrak{f}$ unter (P) vollständig entwickelt.

Der Brioschi'sche Satz enthält die Verallgemeinerung eines zuerst von Hermite[2]) bewiesenen Theorems, wonach für $\mathfrak{x} = \frac{h(x)}{f_1(x)}$ der transfor-

1) Ser. II, T. XI, p. 303.

2) *Sur l'équation du cinquième degré* p. 11 (1866). Man vergleiche auch Brioschi in den *Mathem. Annalen*, Bd. 13, S. 144, und Faà di Bruno, *Binäre Formen*, deutsch von Walter, S. 191.

mierte Ausdruck $\mathfrak{f}\mathfrak{x} = \mathfrak{A}_0 \mathfrak{x}^m + \cdots$ die verlangte Invarianteneigenschaft besitzt, wenn h eine Kovariante vom Grade $n = m - 2$ bedeutet.

Zum Beweise schreiben wir zunächst

$$\mathfrak{f} = a_0^n \prod_i \left(\mathfrak{x} g(x_i) - h(x_i)\right) = \mathfrak{A}_0 (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_1) \cdots (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_m) ,$$

und führen die lineare Transformation $\varrho x = \delta \xi + \delta_1 , \quad \varrho = \delta_2 \xi + \delta_3$ aus. Die Kovariantenbedingung

$$\varepsilon^p \varrho^n g(xb) = \chi(\xi\beta) \qquad \text{oder} \qquad \varepsilon^{n+p} g(x\overset{\mu}{a}) = \sigma^n g(\xi \overset{\mu}{\alpha})$$

liefert

$$\varepsilon^{m(n+p)} \prod_i g(x_i) = \prod_i \sigma_i^n \chi(\xi_i) ,$$

und da nach Artt. 5, 6

$$p = \frac{1}{2}(m\mu - n) , \qquad \alpha_0 = a_0 \prod \sigma_i ,$$

so folgt

$$\varepsilon^{\frac{1}{2} m(m\mu + n)} a_0^n \prod_i g(x_i) = \alpha_0^n \prod_i \chi(\xi_i) ,$$

mit anderen Worten

$$a_0^n \prod_i g(x_i) = \mathfrak{A}_0$$

ist eine Invariante von der Dimension $m\mu + n$.

Diese Invariante ist aber nicht verschieden von der Resultante $R(fg)$, so daß die Funktion

$$\mathfrak{f} = R(f, \, \mathfrak{x} g - h)$$

geschrieben werden kann. In der Tat hat man jetzt nach der Bezeichnung des Art. 6 neben

$$\alpha_0 = a_0 \prod_i (\delta - \delta_2 x_i) , \qquad \beta_0 = \varepsilon^p b_0 \prod_k (\delta - \delta_2 y_k) ,$$

wie für $\xi = \infty$ die Gleichung $\left(\frac{\varepsilon}{\delta_2}\right)^m \beta_0 = \varepsilon^{n+p} g\left(\frac{\delta}{\delta_2}\right)$ ergibt, weil die Koeffizienten b der Kovariante g von den Koeffizienten a in f nicht unabhängig sind. Substituiert man diese Werte in die Gleichung

$$\varepsilon^{mn} a_0^n b_0^m \prod_{ik} (x_i - y_k) = a_0^n \prod_i (\delta - \delta_2 x_i)^n \cdot b_0^m \prod_k (\delta - \delta_2 y_k)^m \cdot \prod_{ik} (\xi_i - \eta_k) ,$$

so folgt wegen

$$R(fg) = a_0^n b_0^m \prod_{ik} (x_i - y_k) , \qquad R(\varphi\chi) = \alpha_0^n \beta_0^m \prod_{ik} (\xi_i - \eta_k) :$$

$$\varepsilon^{m(n+p)} R(fg) = R(\varphi\chi) ,$$

d. h. die Resultante R wird eine Invariante von f vom Gewicht $m(n+p)$ und der Dimension $m\mu + n$.

Um die Invarianteneigenschaft auch der übrigen Koeffizienten $\mathfrak{A}_i$ abzuleiten, bemerken wir, daß die Gleichungen $f = 0$ und $\mathfrak{x} g = h$ durch die

lineare Transformation übergehen in

$$\varphi = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{x}\chi = \psi, \quad \text{oder} \quad \varrho^m f = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{x}\varepsilon^p \varrho^n g = \varepsilon^q \varrho^n h .$$

Die Gleichungen

$$f = 0 \quad \text{und} \quad \varepsilon^{p-q}\mathfrak{x} g = h$$

aber lehren, daß durch den Übergang von x zu ξ in der Gleichung $\mathfrak{f} = 0$ als dem Resultat der Elimination von x aus $f = 0$ und $\mathfrak{x} = \frac{h}{g}$ die nämliche Wirkung erzielt wird, als wenn $\mathfrak{x}$ den Faktor ε^{p-q} (resp. den Divisor ε^{q-p}) erhält, wo

$$p = \frac{1}{2}(m\mu - n), \quad q = \frac{1}{2}(m\nu - n), \quad \text{oder} \quad p - q = \frac{1}{2} m(\mu - \nu) .$$

Es geht mithin $\mathfrak{f}$ über in

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{A}_0 \mathfrak{x}^m + \varepsilon^{q-p}\mathfrak{A}_1\mathfrak{x}^{m-1} + \cdots + \varepsilon^{m(q-p)}\mathfrak{A}_m) = 0 ,$$

wo sich der noch zu bestimmende konstante Faktor

$$\mathfrak{F} = \varepsilon^{\frac{1}{2}m(m\mu+n)}$$

ergibt, weil die Invariante $\mathfrak{A}_0$ das Gewicht $\frac{1}{2}m(m\mu + n)$ besitzt. Damit geht also $\mathfrak{A}_i$ über in $\varepsilon^{\frac{1}{2}m(m\mu+n)+i(q-p)}\mathfrak{A}_i$, mit anderen Worten, die Koeffizienten $\mathfrak{A}_i$ sind Invarianten von der Dimension $m\mu + n + i(\nu - \mu)$, übereinstimmend mit der Angabe Brioschi's a. a. O.

52.

Den spezielleren Hermite'schen Satz erhält man für $n = m - 2$ aus der Transformation der Gleichungen $f = 0$ und $\mathfrak{x}f_{\prime} = h$, wodurch neben

$$\varphi = 0, \quad \mathfrak{x}\varphi_{\prime} = \psi \quad \text{oder} \quad \mathfrak{x}(\delta_2 \varrho^{m-1} f + \varepsilon\varrho^{m-2} f_{\prime}) = \varepsilon^q \varrho^{m-2} h$$

hervorgeht. Wegen $q = \frac{1}{2}m(m\nu - m + 2)$ folgt aus der Gleichung

$$\mathfrak{x}f_{\prime} = \varepsilon^{q-1} h = \varepsilon^{\frac{1}{2}m(\nu-1)} h ,$$

daß $\mathfrak{x}$ den Divisor $\varepsilon^{\frac{1}{2}m(\nu-1)}$ erhält, so daß jetzt durch Einführung von ξ

$$\mathfrak{f} = a_0^{m-2}\prod_i(\mathfrak{x}f_{\prime}(x_i) - h(x_i)) = \mathfrak{A}_0 \prod_i(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_i)$$

übergeht in

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{A}_0\mathfrak{x}^m + \varepsilon^{\frac{1}{2}m(\nu-1)}\mathfrak{A}_1\mathfrak{x}^{m-1} + \cdots + \varepsilon^{\frac{1}{2}m^2(\nu-1)}\mathfrak{A}_m) .$$

Hier bedeutet aber

$$\mathfrak{A}_0 = a_0^{m-2}\prod f_{\prime}(x_i) = \frac{1}{a_0} R(ff_{\prime}) = D_m(f)$$

die Diskriminante von f, also eine Invariante von der Dimension $2(m-1)$ und $\mathfrak{F} = \varepsilon^{m(m-1)}$.[1]) Damit verwandelt sich $\mathfrak{A}_i$ in

$$\varepsilon^{m(m-1)+\frac{1}{2}mi(\nu-1)}\,\mathfrak{A}_i\,,$$

d. h. die Koeffizienten in $\mathfrak{f}$ sind Invarianten von der Dimension

$$2(m-1)+i(\nu-1)\,.$$

Übrigens ist aus den Elementen der Algebra bekannt, daß man einen Ausdruck wie $\mathfrak{x}_i = \frac{h(x_i)}{g(x_i)}$ ersetzen kann durch den analog gebildeten $x_i = \frac{\mathfrak{h}(\mathfrak{x}_i)}{\mathfrak{g}(\mathfrak{x}_i)}$, wo $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{g}$ ganze Funktionen $m-1$-ten Grades bedeuten, und x_i als gemeinschaftliche Wurzel der Gleichungen $f = 0$ und $h = \mathfrak{x}g$ erscheint. Es geht daraus hervor, daß man für $f = 0$ statt der Gleichung $\mathfrak{x} = \frac{h(x)}{g(x)}$ auch die Gleichung $x = \frac{\mathfrak{h}(\mathfrak{x})}{\mathfrak{g}(\mathfrak{x})}$ zur Elimination von x benutzen kann. Zum Überfluß sei noch darauf hingewiesen, daß jede gebrochene Funktion von der Form $\frac{hx_i}{gx_i}$ auf eine *ganze* Funktion $m-1$-ten Grades reduziert werden kann, wenn man

$$\prod_i gx_i = g\,x_i\gamma\,x_i \quad \text{einführt, wodurch} \quad \frac{hx_i\gamma\,x_i}{\Pi gx_i} = \frac{a_0^n}{\mathfrak{A}_0}\,hx_i\gamma\,x_i$$

hervorgeht, also eine ganze Funktion von x_i, für welche man den Rest bei der Division durch $fx_i = 0$ setzen darf. Die Funktion γx_i, in welcher der Faktor gx_i fehlt, ist als ganze symmetrische Funktion der Wurzeln der Gleichung $\frac{f}{x-x_i} = 0$, wie hinlänglich bekannt, eine ganze Funktion der Koeffizienten in $\frac{fx-fx_i}{x-x_i}$, also auch von x_i. Alsdann erhält man die Form einer sogen. Tschirnhaus-Transformation[2])

$$\mathfrak{x} = \varphi(\overset{m-1}{x}) \qquad \text{nebst} \qquad x = \Phi(\overset{m-1}{\mathfrak{x}})\,,$$

während die Gleichungen $f(\overset{m}{x}) = 0$ und $F(\overset{m}{\mathfrak{x}}) = 0$ einander entsprechen.

Es soll jetzt nach dem Vorgange von Hermite und Brioschi für $h = j_6$, also

$$\mathfrak{x} = \frac{j_6}{g}\,, \quad m = 5\,,\ n = 6\,,\ \mu = 2\,,\ \nu = 4\,, \quad g^2 d\mathfrak{x} + 6\,[g j_6]\,dx = 0\,,$$

1) Das nämliche Resultat ergibt der Wert

$$\mathfrak{A}_m = a_0^{m-\nu}\prod_i hx_i = R(fh)$$

als Invariante von der Dimension $m\nu + m - 2$.

2) Die Theorie dieser Transformation findet sich in einem besonderen Abschnitte des Anhanges behandelt.

die Funktion $\mathfrak{f}\mathfrak{x}$ aus fx abgeleitet werden. Damit erhält man

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{A}_0\mathfrak{x}^5 + \mathfrak{A}_1\mathfrak{x}^4 + \mathfrak{A}_2\mathfrak{x}^3 + \mathfrak{A}_3\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{A}_4\mathfrak{x} + \mathfrak{A}_5 = 0\,,$$

wo $\mathfrak{A}_i$ eine Invariante von der Dimension $2i + 16$ wird und $\mathfrak{A}_0 = R(fg)$. In diesem Falle läßt sich jedoch der Wert von $\mathfrak{x}$ auf die Form des Hermite'schen Satzes bringen, wodurch die Dimension der Koeffizienten infolge des Wegfalls des gemeinschaftlichen Faktors $D_5(f)$ sich wesentlich erniedrigt. Da nämlich die Kovarianten

$$g = f_i f_i - f f_{ii} \qquad \text{und} \qquad j_6 = 3\,[f h_8]$$

für $f = 0$ die Werte

$$g = f_i f_i \qquad \text{und} \qquad j_6 = 3 f_i h_8$$

annehmen, so folgt

$$\mathfrak{x} = 3\,\frac{h_8}{f_i}\,, \qquad f_i^2 d\mathfrak{x} + 9\,[f_i h_3]\,dx = 0\,,$$

und es wird $h = h_3$, also

$$n = m - 2 = \nu = 3 \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{A}_0 = D_5(f)\,,$$

so daß die Dimension der Koeffizienten $\mathfrak{A}_i$ auf $2i + 8$ herabsinkt.

Nun besitzt die Funktion $f(\overset{5}{x})$ keine (schiefen) Invarianten 10-ter und 14-ter Dimension, während

$$\mathfrak{A}_5 = R(f h_3) = J_{\mathrm{XVIII}}$$

durch die sogenannte schiefe Invariante Hermite's ausgedrückt wird. Mithin müssen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_3$ verschwinden, so daß $\mathfrak{f}$ die Gestalt annimmt:

$$\mathfrak{f} = D_5\mathfrak{x}^5 + 10\,\mathfrak{C}\mathfrak{x}^3 + 5\,\mathfrak{E}\mathfrak{x} + \mathfrak{F} = 0\,.$$

Für $\mathfrak{z} = \mathfrak{x}\sqrt{D_5}$ erhält man hieraus die *kanonische* Gleichung Hermite's[1]):

$$\mathfrak{z}^5 + 10\,\mathfrak{C}\mathfrak{z}^3 + 5\,\mathfrak{E}D_5\mathfrak{z} = \pm\,\mathfrak{F}\sqrt{D_5^3}\,,$$

mit der Diskriminante

$$\mathfrak{D} = D_5^3\{D_5^3\mathfrak{F}^4 + 32\,\mathfrak{C}\mathfrak{F}^2(5\,D_5^2\mathfrak{C}^2 - 45\,\mathfrak{C}^2 D_5\mathfrak{E} + 108\,\mathfrak{C}^4) +$$
$$+ 256\,\mathfrak{E}^3(D_5\mathfrak{E} - 5\,\mathfrak{C}^2)^2\}\,.$$

Auch ist seit Bring (1786) und Jerrard (1834) bekannt, daß mittelst einer geeigneten Tschirnhaus-Transformation (1683) noch eines der beiden mittleren Glieder entfernt werden kann, wodurch die Wurzel der Gleichung fünften Grades als Funktion eines einzigen Arguments erscheint.

---

1) Brief an Borchardt 1861, *Crelle's Journal* Bd. 59, S. 305, nicht zu verwechseln mit der *Transformée canonique des formes du cinquième degré,* im Art. I der Abhandlung *Sur l'équation du* 5me *degré,* 1866.

53.

Es mag bei dieser Gelegenheit bemerkt werden, daß Eisenstein — jedenfalls unabhängig von Jerrard oder Bring — als Student die „*allgemeine*“ Gleichung fünften Grades mit Hilfe dreier Funktionen φ, χ und ψ aufgelöst hat, welche den Gleichungen

$$\lambda = \varphi^2 = \psi^3 = \chi^5 + \chi$$

genügen (*Crelle's Journal* Bd. 27, S. 81, Jan. 1844). Jacobi dagegen teilt (das. Bd. 13, S. 347, Dez. 1834) als Kuriosum mit, daß, wie er *olim* als *puer studiosus* gefunden, die „*allgemeine*“ Gleichung fünften Grades von der Form

$$x^5 = 10q^2x + p$$

durch die Substitution $x = y + \frac{q}{y}$ in die Gleichung

$$y^{10} + 5qy^8 + 5q^4y^2 + q^5 = py^5$$

übergehe, die natürlich nicht algebraisch auflösbar sei, während die ähnlich gebildete Gleichung

$$y^{10} - 5qy^8 - 5q^4y^2 + q^5 = py^5$$

die Wurzeln

$$2y = \eta + \eta_1 \pm \sqrt{\eta^2 + \eta_1^2}$$

habe, wo

$$2\eta^5 = p + \sqrt{p^2 - 128q^5}, \qquad 2\eta_1^5 = p - \sqrt{p^2 - 128q^5}.$$

Auch zeigt Jacobi a. a. O., daß für die *alternierend zyklische* Funktion der Wurzeln einer Gleichung fünften Grades $f = 0$:

$$y = A\{x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_0 - x_0x_2 - x_2x_4 - x_4x_1 - x_1x_3 - x_3x_0\},$$

die bikubische Resolvente

$$y^6 + a_2y^4 + a_4y^2 + a_6 = \pm 800Ay\sqrt{5D_5(f)}$$

rationale Koeffizienten a besitzt, so daß z. B.

$$a_2 = 200(AE - 4BD + 3C^2) = 200G\ ^{1})$$

sei, während die Werte von a_4 und a_6 *paullo ampliores calculos* erfordern. Diese Rechnungen sind von Cayley geleistet worden (*Philos. Transact.* 1861, p. 271, siehe auch *Crelle's Journal* Bd. 113, S. 42)[2]) und haben ergeben, daß die Koeffizienten keine Invarianten sind.

1) In Band 3 der *Gesammelten Werke*, S. 278 findet sich der berichtigte Wert $a_2 = -100G$.

2) Vgl. Salmon-Fiedler, *Algebra der linearen Transformationen* 2. Aufl.,

Die sechs Wurzeln $z_i = \frac{y_i}{\sqrt{20}}$ der aufgestellten Resolvente werden nach Jacobi (*Werke* Bd. III, S. 278) durch die Gleichungen definiert:

$$z_0 = \frac{A}{\sqrt{20}} \left\{ x_0 x_1 + x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + x_4 x_0 - x_0 x_2 - x_2 x_4 - x_4 x_1 - x_1 x_3 - x_3 x_0 \right\},$$

$$z_1 = \frac{A}{\sqrt{20}} \left\{ x_0 x_1 + x_1 x_3 + x_3 x_4 + x_4 x_2 + x_2 x_0 - x_0 x_3 - x_3 x_2 - x_2 x_1 - x_1 x_4 - x_4 x_0 \right\},$$

$$z_2 = \frac{A}{\sqrt{20}} \left\{ x_0 x_1 + x_1 x_4 + x_4 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_0 - x_0 x_4 - x_4 x_3 - x_3 x_1 - x_1 x_2 - x_2 x_0 \right\},$$

$$z_3 = \frac{A}{\sqrt{20}} \left\{ x_0 x_4 + x_4 x_1 + x_1 x_3 + x_3 x_2 + x_2 x_0 - x_0 x_1 - x_1 x_2 - x_2 x_4 - x_4 x_3 - x_3 x_0 \right\},$$

$$z_4 = \frac{A}{\sqrt{20}} \left\{ x_0 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2 + x_2 x_4 + x_4 x_0 - x_0 x_1 - x_1 x_4 - x_4 x_3 - x_3 x_2 - x_2 x_0 \right\},$$

$$z_5 = \frac{A}{\sqrt{20}} \left\{ x_0 x_2 + x_2 x_1 + x_1 x_4 + x_4 x_3 + x_3 x_0 - x_0 x_1 - x_1 x_3 - x_3 x_2 - x_2 x_4 - x_4 x_0 \right\},$$

deren Summe verschwindet, während der Übergang von z_0 zu den übrigen Wurzeln durch Vertauschung der Indizes 0 1 2 3 4 mit resp. 2 0 1 3 4, 4 2 3 0 1, 1 4 0 2 3, 3 1 2 4 0 und 0 3 4 1 2, oder durch diesen äquivalente Permutationen, vermittelt wird. Zu dieser Form gelangt man durch die nachstehende Überlegung.

Die sogenannte resolvierende Funktion von Lagrange und Vandermonde (1771)

$$\varpi = x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha^3 x_3 + \alpha^4 x_4, \quad \text{wo} \quad \alpha = e^{\frac{2\pi i}{5}},$$

nimmt durch alle möglichen Vertauschungen der Wurzeln x_i 120 Werte an. Beschränkt man die Vertauschungen auf die drei Wurzeln $x_2 x_3 x_4$, so erhält man die sechs Werte:

$$\varpi_0 = x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha^3 x_3 + \alpha^4 x_4, \qquad \varpi_1 = x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha^4 x_3 + \alpha^3 x_4,$$

$$\varpi_2 = x_0 + \alpha x_1 + \alpha^3 x_2 + \alpha^2 x_3 + \alpha^4 x_4, \qquad \varpi_3 = x_0 + \alpha x_1 + \alpha^3 x_2 + \alpha^4 x_3 + \alpha^2 x_4,$$

$$\varpi_4 = x_0 + \alpha x_1 + \alpha^4 x_2 + \alpha^2 x_3 + \alpha^3 x_4, \qquad \varpi_5 = x_0 + \alpha x_1 + \alpha^4 x_2 + \alpha^3 x_3 + \alpha^2 x_4.$$

Jedem dieser Ausdrücke entspricht eine Gruppe von 20 Werten, welche hervorgehen, wenn man 1) die Produkte $\alpha^k \varpi_i$ bildet, wo α^k die fünf Einheitswurzeln durchläuft, und 2) α mit α^2, α^3, α^4 vertauscht. Schreibt

---

S. 327, wo die angegebenen Werte der Koeffizienten sich auf die Form

$$A_0 x^6 + A_2 x^4 + A_4 x^2 + A_5 x + A_6$$

beziehen, und der Wert von A_6 durch 40000 zu multiplizieren ist.

man jetzt

$$v_i = \varpi_i(\alpha)\varpi_i(\alpha^2)\varpi_i(\alpha^3)\varpi_i(\alpha^4) ,$$

wobei die Faktoren α^k von selbst wegfallen, so ergeben sich sechs Produkte $v_0 v_1 \dots v_5$, die den sechs Wurzeln y_i oder z_i entsprechen.

Um dies durch direkte Rechnung zu zeigen, bilde man etwa für $i = 0$ die beiden Produkte

$$\varpi\alpha\varpi\alpha^4 = s_2 + (\alpha + \alpha^4)\xi_1 + (\alpha^2 + \alpha^3)\xi_2$$

und

$$\varpi\alpha^2\varpi\alpha^3 = s_2 + (\alpha + \alpha^4)\xi_2 + (\alpha^2 + \alpha^3)\xi_1 .$$

Hier hat man

$$\xi_1 + \xi_2 = \mathrm{S}\, x_0 x_1 = \frac{10C}{A} , \qquad \xi_1 - \xi_2 = \frac{\sqrt{20}}{A} z_0 ,$$

$$s_2 = 5\frac{5B^2 - 4AC}{A^2} ;$$

ferner wird

$$v_0 = s_2^2 - s_2(\xi_1 + \xi_2) + \xi_1\xi_2 - (\xi_1 - \xi_2)^2$$
$$= \frac{25}{A^4}\{25A_1^2 - A^2 z_0^2\} .$$

Während hiernach v und z^2 Gleichungen sechsten Grades mit *rationalen* Koeffizienten genügen, hebt Jacobi hervor, daß durch Vertauschung zweier Wurzeln x_i und x_k die Wurzeln z in die entgegengesetzten Werte übergehen, und schließt daraus, daß eine bikubische Resolvente für z existiert, wenn man z mit $\prod(x_i - x_k)$ oder $\sqrt{D_5}$ multipliziert. Mit anderen Worten: die rationale Gleichung 6-ten Grades für v oder z^2 zerfällt in zwei Faktoren von der Form

$$\zeta \pm \zeta_1 z\sqrt{D_5} ,$$

wo ζ und $\zeta_1 = A$ gerade Funktionen von z bezeichnen.

54.

Vielleicht mag es hier am Orte sein, die gleichfalls von Jacobi (*Crelle's Journal* III, S. 308 oder *Werke* I, S. 261) herrührende Resolventengleichung $n + 1$-ten Grades für den auf eine Transformation n-ter Ordnung der elliptischen Funktionen bezüglichen Multiplikator $M = z^2$ zu erwähnen. Zwischen den Wurzeln $z_0 z_1 \dots z_n$ finden, wenn $n = 2\nu + 1$ eine Primzahl bedeutet, $\nu + 1$ lineare Relationen statt, dergestalt, daß

$$z_0 = \sqrt{(-1)^\nu n} \cdot A_0 , \quad \text{und für} \quad i = 1 \text{ bis } n:$$

$$z_i = A_0 + A_1\alpha^i + A_2\alpha^{4i} \dots + A_\nu\alpha^{\nu^2 i}$$

wird. Damit erhält man für $n = 5$:

$$z_0 = A_0\sqrt{5}\,, \qquad z_1 = A_0 + A_1\alpha + A_2\alpha^4\,,$$
$$z_2 = A_0 + A_1\alpha^2 + A_2\alpha^3\,, \qquad z_3 = A_0 + A_1\alpha^3 + A_2\alpha^2\,,$$
$$z_4 = A_0 + A_1\alpha^4 + A_2\alpha\,, \qquad z_5 = A_0 + A_1 + A_2\,,$$

und folglich

$$\mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{5} z_i = z_0\sqrt{5}\,, \qquad \mathrm{S}\,\alpha^{2i}z_i = 0\,, \qquad \mathrm{S}\,\alpha^{3i}z_i = 0\,.$$

Kronecker hat in einem Briefe an Hermite (*Comptes rendus* vom 14. Juni 1858), sowie in den *Berliner Monatsberichten* vom 27. Juni 1861 gezeigt, daß die Wurzeln $\pm z_i$ der Resolvente mit denen der Gleichung $f=0$ in Verbindung treten durch den Ausdruck:

$$z_0 = \mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{4} \sin\frac{2i\pi}{5} \mathop{\mathrm{S}}_{k=0}^{4} \{x_k x_{i+k}^2 x_{2i+k}^2 + v\cdot x_k^3 x_{i+k} x_{2i+k}\}$$
$$= \varphi(v, x_0, x_1, \ldots, x_4)\,,$$

wo v einen beliebigen Parameter bezeichnet, während im Übrigen für $i = 1, 2, \cdots 5$ und $x_{k\pm 5} = x_k$

$$z_i = \varphi(v, x_{i-1}, x_{i+2}, x_{i-2}, x_i, x_{i+1})$$

sein soll. Man kann mithin z_0 auch durch eine der beiden Formen definieren:

$$z_0 = (\alpha - \alpha^4)\sum x_0^2 x_1 x_4 (x_1 - x_4) + (\alpha^2 - \alpha^3)\sum x_0^2 x_2 x_3 (x_2 - x_3)\,,$$

oder

$$z_0 = (\alpha - \alpha^4)\sum x_0^3 (x_1 x_2 - x_3 x_4) + (\alpha^2 - \alpha^3)\sum x_0^3 (x_2 x_4 - x_1 x_3)\,,$$

wobei die Summen Σ zyklische Funktionen bedeuten, und das Produkt

$$w = (z_0 - z_1)(z_2 - z_5)(z_3 - z_4)$$

einer kanonischen Gleichung fünften Grades genügt, in welcher sowohl der zweite als der vierte Koeffizient gleich Null ist.

Bekanntlich haben nicht allein Hermite und Brioschi diese algebraischen Zusammenhänge näher untersucht, sondern vornehmlich F. Klein, gestützt auf die einschlagenden Untersuchungen der Herren Schwarz und Gordan, in seinen *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade* gezeigt, welchen Gewinn man durch die Einführung geometrischer Vorstellungen in die algebraische Theorie erzielen kann.[1]) Durch die bahnbrechenden Untersuchungen von Hermite und Kronecker (1858) ist die Theorie der elliptischen Funktionen für

1) Vgl. im Anhange den Abschnitt *über die Auflösung der Ikosaedergleichung*.

die Auflösung der Gleichungen fünften Grades nutzbar gemacht worden. Doch läßt trotz der betreffenden Arbeiten von Brioschi, Gordan, Klein, Kiepert u. a. die *praktische* Anwendbarkeit der komplizierten Formeln auch heute noch Manches zu wünschen übrig.

55.

Wir kehren von dieser Abschweifung zu den früheren Jacobi'schen Formeln zurück, welche gleichfalls die Resolventenwurzeln z_i als zyklische Funktionen der x_i bestimmten. Der Lagrange'schen Theorie entsprechend kann es sich umgekehrt darum handeln, auch die Wurzeln x_i rational durch die z_i auszudrücken. Zu diesem Zwecke hat Cayley a. a. O. (1861), im Anschlusse an vorgängige Untersuchungen von Cockle und Harley (*Quarterly Journal* III, p. 343, 1859), als Funktionen der z_i die fünf Werte w_i eingeführt:

$$w_0 = z_0 z_5 + z_1 z_4 + z_2 z_3\,,$$
$$w_1 = z_1 z_5 + z_2 z_4 + z_0 z_3\,,$$
$$w_2 = z_2 z_5 + z_3 z_4 + z_0 z_1\,,$$
$$w_3 = z_3 z_5 + z_1 z_2 + z_0 z_4\,,$$
$$w_4 = z_4 z_5 + z_1 z_3 + z_0 z_2\,.$$

Damit wird

$$w_i = \varphi(\overset{4}{x}_i), \qquad \text{wo für} \qquad G = AE - 4BD + 3C^2:$$

$$\varphi(\overset{4}{x}) = 4 f_{\prime} f_{\mathrm{V}} + 2 f_{\prime\prime} f_{\mathrm{IV}} - 4 f_{\prime\prime\prime}^2 + 3G = 2 A f_{\prime} - 10 g_{\mathrm{IV}} + 3G =$$
$$= 2A^2x^4 + 8ABx^3 + (22AC - 10B^2)x^2 + (18AD - 10BC)x + {} + 7AE - 10BD + 5C^2.$$

Cayley betont hierbei, daß die Funktionen w_i durch die Vertauschung der y_i resp. z_i im Ganzen 15 Werte annehmen, die als Wurzeln einer rationalen Gleichung 15-ten Grades betrachtet werden können. Diese Gleichung aber ist infolge der erwähnten Doppeldeutigkeit der Wurzeln z_i nicht irreduktibel, sondern läßt sich — was immerhin als ein bemerkenswertes Beispiel angesehen werden darf — in zwei irreduktible Faktoren vom 5-ten und 10-ten Grade zerlegen, von denen der erste die angeführten Wurzelwerte $w_0 \ldots w_4$ enthält, während der zweite von den zehn Wurzeln

$$w_5 = z_0 z_3 + z_1 z_2 + z_3 z_4\,, \qquad w_6 = z_0 z_5 + z_1 z_3 + z_2 z_4\,,$$
$$w_7 = z_1 z_5 + z_2 z_3 + z_0 z_4\,, \qquad \text{usw.}$$

abhängt.

Transformiert man nach Tschirnhaus die Gleichung $f(\overset{5}{x}) = 0$ durch die Substitution $w = \varphi(\overset{4}{x})$, so ergibt die Elimination von x aus beiden

Gleichungen die Gleichung 5-ten Grades $\psi(\overset{5}{w}) = 0$, und die *lineare* Gleichung

$$\alpha x + \beta = 0$$

mit den rationalen Koeffizienten α und β liefert die gemeinschaftliche Wurzel x_i der beiden Gleichungen $f = 0$ und $w = \varphi$ als rationale Funktion von w_i. Übrigens hat man neben

$$\underset{6}{\mathrm{S}}\, z_i = \mathrm{S}\, z_i z_k z_l = 0\ , \qquad \underset{5}{\mathrm{S}}\, w_i = \mathrm{S}\, z_i z_k = -5G\ ,$$

so daß die Gleichung für w die Form annimmt:

$$\psi w = w^5 + 5Gw^4 + 10c_2 w^3 + 10c_3 w^2 + 5c_4 w + c_5\ .$$

Da im allgemeinen Falle die hervorgehenden Ausdrücke wenig übersichtlich werden, so wollen wir mit Jerrard $B = C = D = 0$ setzen und erhalten:

$$Ax^5 + 5Ex + F = 0\ , \qquad \text{neben} \qquad w = A(2Ax^4 + 7E)\ ,$$

$$w' = w + 3AE\ , \qquad \text{wodurch} \qquad \alpha = w'^3, \qquad \beta = 2AFw'^2,$$

sowie

$$w'^5 - 10AEw'^4 - 32A^6F^4 = 0\ .$$

Folglich wird in diesem Falle

$$(w_i + 3AE)x_i + 2AF = 0 \qquad \text{oder} \qquad x_i = -\frac{2AF}{w_i + 3AE}\,.$$

Harley findet (a. a. O. S. 351) etwas weniger einfach für $B = C = E = 0$:

$$fx = Ax^5 + 10Dx^2 + F\ , \qquad w = Ax^4 + 9Dx\ ,$$

$$\alpha = Aw^3 - 2ADFw - 9D^4 \qquad \beta = AFw^2 + D^3w - ADF^2\ ,$$

nebst

$$Aw^5 + 5ADFw^3 - 10D^4w^2 - 25AD^2F^2w - F(A^2F^3 + 81D^5) = 0\ ,$$

$$x = -\frac{AFw^2 + D^3w - ADF^2}{Aw^3 - 2ADFw - 9D^4} = -\frac{F(Aw^3 - 2ADFw - 9D^4)}{Aw^4 - 3ADFw^2 - 10D^4w + AD^2F^2}\,,$$

wo $2Aw$ für w geschrieben ist.

56.

Die Koeffizienten der bikubischen Resolvente durch *Kovarianten* auszudrücken, gelingt mit Hilfe einer zweiten alternierend zyklischen Funktion der Wurzeln x_k:

$$\mathfrak{y} = A\{x_0x_1x_2 + x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_0 + x_4x_0x_1 - \\ - x_0x_2x_4 - x_2x_4x_1 - x_4x_1x_3 - x_1x_3x_0 - x_3x_0x_2\}.$$

In der Tat erfüllt die in x lineare Funktion

$$z = \frac{1}{\sqrt{20}}(xy - \mathfrak{y})$$

die bikubische Gleichung

$$z^6 - 5g_2 z^4 + 5(g_2^2 - 2j_4)z^2 - 5(25h_3^2 - fk_1) = f \cdot z\sqrt{D_5}\,,$$

welche die Jacobi'sche Resolvente liefert, wenn man nur die Koeffizienten der höchsten Potenzen von x in z und den resp. Kovarianten beibehält. Für $x = 0$ erhält man die analog gebildete Resolvente für die Funktion $\mathfrak{y}$. Selbstverständlich kann durch geeignete Bestimmung des Wertes von x, wenn man will, eines der Glieder dieser Gleichung zum Verschwinden gebracht werden, so daß z. B. für $x = x_i$ die Resolvente die Form einer kubischen Gleichung

$$z^6 + a_2 z^4 + a_4 z^2 = 125 h_3^2(x_i)$$

annimmt.

Im Wesentlichen, wenn auch in anderer Form, findet sich diese Verallgemeinerung bereits in der zitierten Abhandlung von Cayley (*Math. Papers* Vol. IV, S. 323), auch Brioschi hat sich damit beschäftigt in den *Memorie del R. Istituto Lombardo* T. IX, p. 215—31 (siehe auch *Mathem. Annal.* Bd. 13, S. 153), wo er anführt, daß wenn die Gleichung fünften Grades in der kanonischen Form

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x}^5 + 10\mathfrak{C}\mathfrak{x}^3 + 5\mathfrak{E}\mathfrak{x} + \mathfrak{F} = 0$$

gegeben ist, nach Malfatti (1771) und Ruffini (1806) die Koeffizienten der bikubischen Resolvente sich in der Gestalt entwickeln lassen:

$$a_2 = -100(3\mathfrak{C}^2 + \mathfrak{A}\mathfrak{E})\,, \quad a_4 = 2000(15\mathfrak{C}^4 - 2\mathfrak{A}\mathfrak{C}^2\mathfrak{E} + 3\mathfrak{A}^2\mathfrak{E}^2)\,,$$

$$a_6 = -40000(25\mathfrak{C}^6 - 35\mathfrak{A}\mathfrak{C}^4\mathfrak{E} + 11\mathfrak{A}^2\mathfrak{C}^2\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{A}^3\mathfrak{E}^3 - \mathfrak{A}^3\mathfrak{C}\mathfrak{F}^2)\,.$$

57.

Die bikubischen Gleichungen.

Wir wenden uns schließlich zum Falle

$$m = 6$$

oder

$$f = Ax^6 + 6Bx^5 + 15Cx^4 + 20Dx^3 + 15Ex^2 + 6Fx + G_6\,.$$

Zur Aufstellung der typischen Gleichung für

$$z = \frac{f}{x - y} - \frac{1}{6}f'(x)\,, \qquad f(y) = 0\,,$$

$$z^6 + 15f_2 z^4 + 20f_3 z^3 + 15f_4 z^2 + 6f_5 z + f_6 = 0$$

erhält man die Kovariantenwerte

$$f_2 = -g\,,\qquad f_3 = -h\,,\qquad f_4 = f^2 g_4 - 3g^2\,,$$

$$f_5 = f^2 h_8 - 2gh \qquad \text{und} \qquad f_6 = f^4 J_{\prime\prime} + 15 f^2 g g_4 - 45 g^3 + 10 h^2\,.$$

Hier werden die assoziierten Kovarianten

$$g = -\psi_2\,,\qquad h = -\psi_3\,,\qquad g_4 = \psi_4\,,\qquad h_8 = \psi_5$$

mit der Invariante $J_{\prime\prime} = \psi_6$ und den zugehörigen Maßzahlen n, μ, p $= 8, 2, 2;\ 12, 3, 3;\ 4, 2, 4;\ 8, 3, 5$ und $0, 2, 6$ durch die Ausdrücke definiert:

$$g = -\frac{1}{2}[ff]_2 = B_0 x^8 + 8B_1 x^7 + 28 B_2 x^6 + 56 B_3 x^5 + 70 B_4 x^4 + \\ + 56 B_5 x^3 + 28 B_6 x^2 + 8 B_7 x + B_8\,,$$

$$h = 2[fg] = i_0 x^{12} + 12 i_1 x^{11} + \cdots\,,$$

$$g_4 = \frac{1}{2}[ff]_4 = G x^4 + 4 G_1 x^3 + 6 G_2 x^2 + 4 G_3 x + G_4\,,$$

$$h_8 = 2[f g_4] = k_0 x^8 + 8 k_1 x^7 + \cdots\,,$$

$$J_{\prime\prime} = \frac{1}{2}[ff]_6 = A G_6 - 6BF + 15 CE - 10 D^2\,.$$

Die Koeffizienten in g sind gegeben durch

$$B_0 = B^2 - AC = A_1\,,\qquad B_1 = \frac{1}{2}(BC - AD)\,,$$

$$B_2 = \frac{1}{14}(5C^2 - 2BD - 3AE)\,,\qquad B_3 = \frac{1}{14}(5CD - 4BE - AF)\,,$$

$$B_4 = \frac{1}{70}(20 D^2 - 5CE - 14 BF - A G_6)\,,$$

$$B_5 = \frac{1}{14}(5DE - 4CF - B G_6)\,,\qquad B_6 = \frac{1}{14}(5E^2 - 2DF - 3C G_6)\,,$$

$$B_7 = \frac{1}{2}(EF - D G_6)\,,\qquad B_8 = F^2 - E G_6\,,$$

und in g_4 durch

$$G = AE - 4BD + 3C^2\,,$$

$$G_1 = \frac{1}{2}(AF - 3BE + 2CD)\,,\qquad G_2 = \frac{1}{6}(A G_6 - 9CE + 8D^2)\,,$$

$$G_3 = \frac{1}{2}(B G_6 - 3CF + 2DE) \qquad \text{und} \qquad G_4 = C G_6 - 4DF + 3E^2.$$

Außerdem hat man wie früher

$$i_0 = 3ABC - A^2 D - 2B^3\,,$$

sowie

$$k_0 = A^2 F - 5ABE + 2ACD + 8B^2 D - 6BC^2\,.$$

Ferner wird

$$g = \frac{1}{180} A^2 \sum_{15} (x_0 - x_1)^2 (x - x_2)^2 (x - x_3)^2 (x - x_4)^2 (x - x_5)^2,$$

$$h = \frac{1}{2160} A^3 \sum_{120} (x_0 - x_1)^2 (x_0 - x_2)(x - x_1)(x - x_2)^2 (x - x_3)^3 (x - x_4)^3 (x - x_5)^3,$$

$$= \frac{1}{1080} A^3 \sum_{60} (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3) \times$$
$$\times (x - x_1)^2 (x - x_2)^2 (x - x_3)^2 (x - x_4)^3 (x - x_5)^3,$$

$$g_4 = \frac{1}{900} A^2 \sum_{45} (x_0 - x_1)^2 (x_2 - x_3)^2 (x - x_4)^2 (x - x_5)^2,$$

$$= \frac{1}{450} A^2 \sum_{45} (x_0 - x_1)(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_0)(x - x_4)^2 (x - x_5)^2,$$

$$(h_8) = * A^3 \sum_{360} (x_0 - x_1)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_0 - x_4) \times$$
$$\times (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)^2 (x - x_5)^3,$$

$$= * A^3 \sum_{60} (x_0 - x_1)^2 (x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_2 - x_5) \times$$
$$\times (x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)^2 (x - x_4)^2 (x - x_5)^2,$$

$$J_{\prime\prime} = -\frac{1}{240} A^2 \sum_{15} (x_0 - x_1)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_4 - x_5)^2,$$

$$(J_{\prime\prime}) = * A^2 \sum_{60} (x_0 - x_1)(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_4)(x_4 - x_5)(x_5 - x_0),$$

wobei allerdings auf die Eingangsbemerkung zu Art. 45 zu verweisen ist.

Die Einführung der Potenzsummen $\sigma_k = S_i z_i^k$ liefert

$$\sigma_1 = 0, \qquad \sigma_2 = 30g, \qquad \sigma_3 = 60h,$$

$$\sigma_4 = 30(21g^2 - 2f^2 g_4), \qquad \sigma_5 = 30(52gh - f^2 h_8),$$

$$\sigma_6 = 6(1845 g^3 + 190 h^2 - 240 f^2 g g_4 - f^4 J_{\prime\prime}),$$

$$\sigma_7 = 210(186 g^2 h - 3 f^2 g h_8 - 10 f^2 g_4 h),$$

$$\sigma_8 = 30(6525 g^4 + 1624 g h^2 - 1140 f^2 g^2 g_4 - 32 f^2 h h_8 +$$
$$+ 30 f^4 g_4^2 - 4 f^4 g J_{\prime\prime}).$$

. . . .

Damit geht die typische Gleichung hervor:

$$z^6 = 15 g z^4 + 20 h z^3 + 15(3g^2 - f^2 g_4) z^2 + 6(2gh - f^2 h_8) z +$$
$$+ 45 g^3 - 10 h^2 - 15 f^2 g g_4 - f^4 J_{\prime\prime},$$

$$= \frac{1}{2} \sigma_2 z^4 + \frac{1}{3} \sigma_3 z^3 + \frac{1}{4} (\sigma_4 - \frac{1}{2} \sigma_2^2) z^2 + \frac{1}{5} (\sigma_5 - \frac{5}{6} \sigma_2 \sigma_3) z +$$
$$+ \frac{1}{6} (\sigma_6 - \frac{3}{4} \sigma_2 \sigma_4 - \frac{1}{3} \sigma_3^2 + \frac{1}{8} \sigma_2^3),$$

mit der Diskriminante $f^{20}D_6(f)$, wo

$$D_6(f) = -\frac{1}{6^6}A^{10}\,|\,s_i s_{i+1} s_{i+2}\ldots s_{i+5}\,| = -\frac{1}{6^6}A^{10}\prod_{ik}^{*}(x_i - x_k)^2,$$

die zugehörige Invariante aber ist $f^4 J_{,,}$.

58.

Von sonstigen Kovarianten und Invarianten für $m = 6$ wollen wir nachstehend die hauptsächlichsten zu weiterem Gebrauche entwickeln, und beginnen mit den sogen. permanenten Kovarianten des Art. 44:

$$j = -j_{12}, \quad h' = h_6, \quad j' = j_4, \quad h'' = h_2 \quad \text{und} \quad j'' = L,$$

mit den höchsten Koeffizienten J, H, K, l_0 und L (resp. $\mathfrak{L}$ oder Δ).

Wir bestimmen zunächst h_6 durch die Gleichung

$$h_6 = -\frac{5}{12}[fg]_4 - \frac{1}{28}[fg_4]_2 = Hx^6 + \cdots,$$

während für $m = 5$:

$$h_3 = -\frac{5}{12}[fg]_4 = -\frac{1}{3}[fg_2]_2 = Hx^3 + \cdots$$

und für $m = 4$: $H = -\frac{1}{3}[fg]_4$ erhalten wurde, weil die betreffenden Überschiebungswerte keine permanenten Kovarianten darstellen. Nun wird für $x = 0$:

$$70[fg]_4^0 = 70\{CB_8 - 4DB_7 + 6EB_6 - 4FB_5 + GB_4\},$$

$$= -AG^2 + 6BFG - 165CEG + 150CF^2 + 160D^2G - 300DEF + 150E^3,$$

$$6[fg_4]_4^0 = 6\{EG_4 - 2FG_3 + GG_2\},$$

$$= AG^2 - 6BFG - 3CEG + 18CF^2 + 8D^2G - 36DEF + 18E^3,$$

mithin der *letzte* Koeffizient in h_6:

$$-\frac{5}{12}[fg]_4^0 - \frac{1}{28}[fg_4]_2^0 = CEG - CF^2 - D^2G + 2DEF - E^3,$$

und hieraus geht auf bekannte Weise durch Buchstabenvertauschung der Wert des *ersten* Koeffizienten H in h' hervor.[1])

Nach dem Hermite'schen Satze folgt

$$f^3h_6 = f_2f_4 - f_3^2 - f_2^3 = 4g^3 - h^2 - f^2gg_4,$$

1) Hier ist der Bequemlichkeit halber der Index 6 weggeblieben, also G statt G_6 geschrieben.

oder für

$$j_{12} = -Jx^{12} + \cdots = \frac{24}{65}[fh_8] + \frac{238}{65}[gg]_8 - \frac{3}{65}f^2 J_{,,} :$$

$$4g^3 - h^2 = f^2(gg_4 + fh_6) = f^2 j_{12} ,$$

so daß in Übereinstimmung mit Art. 44 j durch

$$j + gg_4 + fh_6 = 0$$

gegeben ist.

Ferner wird

$$h'' = h_2 = \frac{1}{2}[fg_4]_4 = l_0 x^2 + 2l_1 x + l_2 =$$

$$= * A^3 \sum_{45}(x_0 - x_1)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_4 - x_5)^2 (x_0 - x_2)(x_1 - x_3)(x - x_4)(x - x_5),$$

$$l_0 = ACG - 3ADF + 2AE^2 - B^2G + 3BCF - BDE - 3C^2E + 2CD^2 ,$$

$$2l_1 = ADG - AEF - BCG - 8BDF + 9BE^2 + 9C^2F - 17CDE + 8D^3 ,$$

$$l_2 = AEG - AF^2 - 3BDG + 3BEF + 2C^2G - CDF - 3CE^2 + 2D^2E .$$

Aus den Ausdrücken für l_0 oder l_2 ergibt sich

$$f^5 h_2 = f_2 f_6 - 3f_3 f_5 + 2f_4^2 - 3f_3^2 f_4 + 2f_2 f_3^2 ,$$

$$= 2f^4 g_4^2 - f^4 g J_{,,} - 30 f^2 g^2 g_4 + 3f^2 h h_8 + 18 g(4g^3 - h^2) ,$$

woraus nach Division durch f^2 erhalten wird:

$$f^3 h_2 = 2f^2 g_4^2 - f^2 g J_{,,} + 18 f g h_6 - 12 g^2 g_4 + 3 h h_8 ,$$

$$= -30 g^2 g_4 + 18 g j_{12} + 3 h h_8 + 2 f^2 g_4^2 - f^2 g J_{,,} .$$

Folglich muß $hh_8 - 4g^2 g_4$ durch f teilbar sein oder

$$k_0 i_0 - 4A_1^2 G$$

den Faktor A besitzen. Nach Art. 43 aber ist

$$\psi_2\psi_5 - \psi_3\psi_4 = ff_0 , \qquad f_0 = A_0 x^{4m-14} + \cdots ,$$

also für $m = 6$:

$$g_4 h - g h_8 = f f_0 , \qquad f_0 = j_{10} = A_0 x^{10} + \cdots .$$

Durch Kombination beider Ausdrücke erhält man die Formel des Art. 43:

$$\psi_5^2 + 4\psi_2\psi_4^2 = f\mathfrak{f}$$

oder

$$h_8^2 - 4gg_4^2 = fk_{10} , \qquad k_{10} = \mathfrak{A}x^{10} + \cdots ,$$

nebst

$$k_0^2 - 4A_1 G^2 = A\mathfrak{A} ,$$

den Resultaten der Artt. 43 und 48 entsprechend.

Um die Kovariante

$$j' = -5[gg_4]_4 - \frac{24}{7}[g_4g_4]_2 = 28[gg]_6 - \frac{54}{7}[g_4g_4]_2$$

zu bestimmen, kehren wir zu dem Werte des Art. 48 für $K = J_{IV}$ zurück:

$$f^6 K = f_5^2 + 4f_2f_3f_5 + 16f_2f_4^2 - 12f_3^2f_4 + 48f_2^3f_4 - 32f_2^2f_3^2,$$

welcher für $m = 6$ liefert

$$f^4 j_4 = f^2h_8^2 - 16f^2gg_4^2 + 48g^3g_4 - 12g_4h^2,$$

oder

$$f^2 j_4 = \quad h_8^2 - 4gg_4^2 + 12fg_4h_6 = h_8^2 - 16gg_4^2 + 12g_4j_{12},$$

wo wiederum $h_8^2 - 4gg_4^2$ durch f teilbar erscheint. Man kann folglich auch setzen:

$$fj_4 = k_{10} + 12g_4h_6 \qquad \text{nebst} \qquad AK = \mathfrak{A} + 12GH,$$

während

$$j' = j_4 = Kx^4 + 4K_1x^3 + 6K_2x^2 + 4K_3x + K_4$$

vom Grade 4, Dimension 4, Gewicht 10 wird.

59.

Wir entwickeln noch die drei Kovarianten k_4, j_6 und j_8 mittelst der Gleichungen

$$k_4 = \mathfrak{G}x^4 + 4\mathfrak{G}_1x^3 \cdots = 2[g_4h_2] = \frac{1}{3}g_4'h_2 - g_4h_2',$$

$$j_6 = \mathfrak{H}x^6 + 6\mathfrak{H}_1x^5 \cdots = 2[fh_2] = \frac{1}{3}f'h_2 - fh_2',$$

$$j_8 = \mathfrak{K}x^8 + 8\mathfrak{K}_1x^7 \cdots = 3[fh_6]_2 + \frac{6}{5}[gg_4]_2 + \frac{6}{7}g_4^2.$$

Hier werden die höchsten Koeffizienten

$$\mathfrak{G} = 2(Gl_1 - G_1l_0), \qquad \mathfrak{H} = 2(Al_1 - Bl_0),$$

$$\mathfrak{K} = G^2 + A'^{1)} = A^2DF - 3ABCF - 5ABDE + 10AC^2E - 4ACD^2 +$$
$$+ 2B^3F - 5B^2CE + 14B^2D^2 - 16BC^2D + 6C^4.$$

Die Einführung der assoziierten Werte ergibt alsdann:

$$f^8k_4 = (3f_2^2 + f_4)f^5j_6 - (2f_2f_3 + f_5)f^5h_2,$$

$$f^5j_6 = f_3f_6 - f_4f_5 + 9f_2^2f_5 - 17f_2f_3f_4 + 8f_3^3,$$

$$f^4j_8 = f_3f_5 + 10f_2^2f_4 - 4f_2f_3^2 + 6f_2^4,$$

1) Vgl. Art. 49.

neben dem früher gefundenen Ausdruck

$$f^5 h_2 = f_2 f_6 - 3 f_3 f_5 + 2 f_4^2 - 3 f_2^2 f_4 + 2 f_2 f_3^2 ,$$

und damit:

$$f k_4 = g_4 j_6 - h_2 h_8 ,$$

$$f^3 j_6 = 12 g^2 h_8 - 30 g g_4 h + 18 h j_{12} - f^2 g_4 h_8 - f^2 h J_{\prime\prime} ,$$

$$f^2 j_8 = 10 g^2 g_4 - 6 g j_{12} - h h_8 ,$$

neben

$$f^3 h_2 = - 30 g^2 g_4 + 18 g j_{12} + 3 h h_8 + 2 f^2 g_4^2 - f^2 g J_{\prime\prime} ,$$

und

$$f h_2 = 2 g_4^2 - 3 j_8 - g J_{\prime\prime} .$$

Durch die Gleichungen

$$6 k_{12} = g_1 h_8 + h J_{\prime\prime} + f j_6 ,$$

$$f^2 k_{12} = 2 g^2 h_8 - 5 g g_4 h + 3 h j_{12} ,$$

$$f^4 k_{12} = 2 f_2^2 f_5 + f_2^3 f_3 - 5 f_2 f_3 f_4 + 3 f_3^3$$

wird folglich eine Kovariante fünfter Dimension k_{12} definiert.

Die drei biquadratischen Kovarianten

$$g_4 = G x^4 \ldots, \qquad j_4 = K x^4 \ldots \qquad \text{und} \qquad k_4 = \mathfrak{G} x^4 \ldots$$

mit den Gewichten 4, 10 und 13 führen zur Aufstellung zahlreicher Invariantenausdrücke:

$$J_{\mathrm{IV}} = G G_4 - 4 G_1 G_3 + 3 G_2^2 ,$$

$$J_{\mathrm{VI}} = G G_2 G_4 - G G_3^2 - G_1^2 G_4 + 2 G_1 G_2 G_3 - G_2^3 ,$$

$$J_{\mathrm{VIII}} = K K_4 - 4 K_1 K_3 + 3 K_2^2 ,$$

$$J_{\mathrm{X}} = \mathfrak{G} \mathfrak{G}_4 - 4 \mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_3 + 3 \mathfrak{G}_2^2 ,$$

endlich

$$J_{\mathrm{XII}} = K K_2 K_4 - K K_3^2 - K_1^2 K_4 + 2 K_1 K_2 K_3 - K_2^3 ,$$

$$J_{\mathrm{XV}} = \mathfrak{G} \mathfrak{G}_2 \mathfrak{G}_4 - \mathfrak{G} \mathfrak{G}_3^2 - \mathfrak{G}_1^2 \mathfrak{G}_4 + 2 \mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2 \mathfrak{G}_3 - \mathfrak{G}_2^3 ,$$

mit den resp. Gewichten 12, 18, 24, 30, 36 und 45. Für die *schiefe* Invariante J_{XV} kann man mittelst der Wurzeldifferenzen die symmetrische Summe bilden:

$$J_{\mathrm{XV}} = [h_2^4 h_8]_8 = * A^5 \sum_{720} (x_0 - x_1)^{10} (x_2 - x_3)^{10} (x_4 - x_5)^{10} (x_0 - x_3)^5 \times$$
$$\times (x_1 - x_4)^3 (x_2 - x_5)^3 (x_2 - x_4)^2 (x_1 - x_5)^2 .$$

60.

Wenden wir uns spezieller zu den *Invarianten* von f, so haben wir zunächst nach Art. 46 drei symmetrische Wurzelausdrücke für J_{IV}, welche sich voneinander durch Vielfache von $J_{\prime\prime}^2$ unterscheiden und den drei Werten

$$L = [fh_6]_6\ ,\qquad \mathfrak{L} = 6[g_4 g_4]_4\ ,\qquad \Lambda = 70[gg]_8$$

entsprechen. Man erhält durch eine leichte Rechnung:

$$j'' = L = \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & E \\ C & D & E & F \\ D & E & F & G \end{vmatrix} =$$

$$= ACEG - ACF^2 - AD^2G + 2ADEF - AE^3 -$$
$$- B^2EG + B^2F^2 + 2BCDG - 2BCEF - 2BD^2F + 2BDE^2 -$$
$$- C^3G + 2C^2DF + C^2E^2 - 3CD^2E + D^4\ ,$$

$$\mathfrak{L} = J_{\prime\prime}^2 - 36L\ ,\qquad \Lambda = J_{\prime\prime}^2 + 300L\ .$$

Die Einführung der assoziierten Kovarianten f_i ergibt

$$f^8L = f_2f_4f_6 - f_2f_5^2 - f_3^2f_6 + 2f_3f_4f_5 - f_4^3 - f_3^2f_6 +$$
$$+ 2f_2^2f_3f_5 + f_2^2f_4^2 - 3f_2f_3^2f_4 + f_3^4,$$

$$f^4L = 4g^2g_4^2 + gh_8^2 - 2g_4hh_8 - f^2g_4^3 - 9f^2h_6^2 + f^3h_6J_{\prime\prime}\ ,$$

$$f^2L = gj_4 - g_4^3 + 2g_4j_8 - 9h_6^2 + fh_6J_{\prime\prime}\ ,$$

so daß

$$f^2(gL + h_2h_6) = g^2j_4 - 3gg_4^3 + 5gg_4j_8 - 9gh_6^2 + 2g_4^2j_{12} - 3j_8j_{12}\ ,$$

neben

$$hj_6 - 4g^2h_2 = f(g_4j_8 - 18h_6^2 + j_{12}J_{\prime\prime})\ ,$$

und

$$fk_6 = gj_4 - 3g_4^3 + 5g_4j_8 - 9h_6^2 + j_{12}J_{\prime\prime}\ .$$

Hier bedeutet k_6 eine Kovariante 6. Grades, Dimension 5.

Für die Invarianten der 6. und 10. Dimension setzen wir

$$J_{VI} = -2[h_2h_2]_2 = 4(l_1l_1 - l_0l_2) = A^2D^2G^2 + \cdots = M\ ,$$

$$J_X = [ff_2^3]_6 = A^4(EG - F^2)^3 + \cdots = N,$$

und erhalten nach leichter Reduktion:

$$f^{12}M = f^{10}j_6^2 - 4f^5h_2(f_4f_6 - f_5^2 + 2f_2^2f_6 - f_2f_3f_5 - 3f_2f_4^2 + 2f_3^2f_4)\ ,$$

$$f^2M = j_6^2 - 4gh_2^2 + 4fh_2(j_4 - g_4J'')\ .$$

Der Ausdruck der Diskriminante D_6 endlich nimmt die Gestalt an

$$D_6(f) = J_{\prime\prime}^5 - 375\, J_{IV}\, J_{\prime\prime}^3 - 625\, J_{VI}\, J_{\prime\prime}^2 + 3125\, J_X =$$
$$= 5^5(J''^5 - 15 LJ''^3 - 5MJ''^2 + N)\ ,$$

wenn $J_{\prime\prime} = 5J''$ gesetzt wird.

Es mögen noch zur eventuellen Erleichterung der Kontrolle die Vereinfachungen angeführt werden, die sich bei der sogen. *kanonischen* Form für $B = D = 0$ ergeben. Man erhält für die höchsten Koeffizienten in

$$g = A_1 x^8 \cdots , \qquad g_4 = G x^4 \cdots , \qquad h = i_0 x^{12} \cdots , \qquad h_8 = k_0 x^8 \cdots ,$$
$$h_2 = l_0 x^2 \cdots , \qquad h_6 = H x^6 \cdots , \qquad j_{12} = - J x^{12} \cdots ,$$
$$j_4 = K x^4 \cdots , \qquad j_6 = \mathfrak{H} x^6 \cdots , \qquad j_8 = \mathfrak{K} x^8 \cdots$$

die Werte:

$$A_1 = - AC\ , \quad G = AE + 3C^2 , \quad i_0 = 0\ , \quad k_0 = A^2 F\ ,$$
$$l_0 = ACG_6 + 2AE^2 - 3C^2 E\ , \quad H = C(AE - C^2)\ ,$$
$$J = 4AC^3\ , \quad K = A^2 F^2 + 16ACE^2 + 48C^3 E\ ,$$
$$\mathfrak{H} = AF(- AE + 9C^2)\ , \quad \mathfrak{K} = 2C^2(5AE + 3C^2)\ ,$$

nebst den Invarianten

$$J_{\prime\prime} = AG_6 + 15CE\ ,$$
$$J_{IV} = L = ACEG_6 - ACF^2 - AE^3 - C^3 G_6 + C^2 E^2\ ,$$
$$J_{VI} = A^2\{- 4CEG_6^2 + 4CF^2 G_6 - 8E^3 G_6 + 9E^2 F^2\} +$$
$$+ 2AC\{- 4C^2 G_6^2 + 4CE^2 G_6 - 15CEF^2 + 12E^4\} +$$
$$+ 3C^3\{8CEG_6 + 27CF^2 - 12E^3\}\ .$$

61.

Es handelt sich noch um die Berechnung der Sturm'schen Funktionen

$$S_i = 5^{i-1}\, 6^i f^{(i-1)(i-2)}\, T_i \quad \text{für } m = 6\ ,$$

wo zur Vereinfachung der Faktor $5^{i-1}\, 6^i$ beigefügt worden ist. Für $i = 1, 2, 3$ findet man leicht

$$T_1 = 1\ , \qquad T_2 = g\ , \qquad T_3 = 2(gg_4 + 2fh_6)\ ;$$

ferner wird

$$S_4 = \sigma_6 S_3 - \sigma_5(\sigma_0\sigma_2\sigma_5 - 2\sigma_0\sigma_3\sigma_4 - 2\sigma_2^2\sigma_3) - \sigma_4(\sigma_0\sigma_4^2 - \sigma_2^2\sigma_4 + 3\sigma_2\sigma_3^2) + \sigma_3^4 ,$$

$$= 5^3 6^4 \{2f^2(gg_4 + 2fh_6)(521g^3 - 86f^2gg_4 - 38f^3h_6 - f^4J'') +$$
$$+ (52gh - f^2h_8)(52g^2h + f^2gh_8 - 8f^2g_4h) + 80h^4 -$$
$$- 2(21g^2 - 2f^2g_4)(288g^4 - 67f^2g^2g_4 - 30f^3gh_6 + 2f^4g_4^2)\} .$$

Bringt man hier den Faktor f^6 zur Evidenz, so geht der gesuchte Ausdruck mit den Maßzahlen 12, 6 und 12 hervor:

$$T_4 = -\{gj_4 - 8g_4^3 + 8g_4j_8 + 72h_6^2 + 2gg_4J'' + 4fh_6J''\},$$

wofür man auch schreiben kann

$$T_4 = 2(gg_4 - 2j_4)J'' - gj_4 + 8(g_4^3 - g_4j_8 - 9h_6^2) ,$$

oder

$$= 3gj_{12} + 4g_4^3 - 108h_6^2 - 2gg_4J'' + 16fh_6J'' - 4f^2L .$$

Die für die Determinante S_5 erforderliche, nicht unbeschwerliche Rechnung habe ich in den Artt. 6—10 der Leipziger Berichte vom 17. Juni 1907 skizziert, aber nur durchgeführt bis zu dem Ausdrucke

$$S_5' = 5^4 6^5 f^{12} T_5 = 5^4 6^5 f^8 \{s + s'f^2 + s''f^4\} ,$$

wo die Kovarianten s die Werte haben:

$$s = 8g\{j_8(1092\,gj_8 + 1045\,gg_4^2 - 663g_4j_{12}) +$$
$$+ gj_4(236gg_4 + 1047j_{12}) - g_4^3(618gg_4 - 427j_{12}) -$$
$$- 81h_6^2(188gg_4 - 5j_{12}) - 48 \cdot 91g^2(gL + h_2h_6)\} ,$$

$$s' = 2\{8g_4(5g_4^4 - 14g_4^2j_8 - 16j_8^2) + 24h_6^2(97g_4^2 + 9j_8) +$$
$$+ j_4(36gj_8 - 29gg_4^2 - 206g_4j_{12}) - 5g(4gg_4 + j_{12})J''^2 +$$
$$+ 18g(gj_4 - 9h_6^2)J'' + 2g_4^2(17gg_4 - 16j_{12})J'' - 6j_8(7gg_4 - 8j_{12})J''\} .$$

$$s'' = gJ''^3 + 4(g_4^2 + j_8)J''^2 - 6g_4j_4J'' + j_4^2 .$$

Man gewinnt daraus den gesuchten Ausdruck für T_5, wenn man durch Aussonderung des Faktors f^2 s auf die Form bringt:

$$s = f^2 t , \qquad \text{und weiter} \qquad s' + t = f^2 t'$$

setzt, wodurch

$$T_5 = s'' + t'$$

hervorgeht. Hier sind die Maßzahlen von s durch 32, 12, 20, von s' und t durch 20, 10, 20 und von s'' und t', sowie von T_5 durch 8, 8, 20

gegeben. Da endlich

$$S_6 = -6^6 f^2 D_6(f), \qquad T_5 = -D_6(f),$$

so hat man schließlich, um die Zahl der reellen und komplexen Wurzeln einer bikubischen Gleichung mit reellen Koeffizienten zu finden, die Anzahl der Zeichenwechsel zu bestimmen in der Reihe der Größen:

$$1,\ g,\ \ gg_4 + 2fh_6,\quad 3gj_4 + 4g_4^3 - 108h_6^2 - 2gg_4J'' + 16fh_6J'' - 4f^2L,$$
$$T_5 = s'' + t' \quad \text{und} \quad -(J''^5 - 15LJ''^3 - 5MJ''^2 + N).$$

Die explizite Berechnung der Kovarianten t und t' ist dem Verfasser noch nicht vollständig gelungen, und es bliebe immerhin die Möglichkeit, daß trotz der angewandten Kontrollen ein Rechenfehler übersehen worden wäre. Die Hauptsache wird freilich sein, die zur Reduktion geeigneten Beziehungen zwischen den auftretenden Kovarianten zu ermitteln, eine Aufgabe, zu deren Lösung ich den einen oder anderen meiner Leser anregen möchte, da ein verhältnismäßig einfaches Resultat zu erwarten steht. Selbstverständlich wird man den Endformeln verschiedene Gestalt geben können, wenn man die früher entwickelten Relationen zwischen den Kovarianten zur Transformation benutzt.

62.

Die in den Artt. 51 und 52 abgeleiteten Sätze von Hermite und Brioschi führen zur kanonischen Transformation der bikubischen Gleichung, wenn man x durch

$$\mathfrak{x} = \frac{h_8}{g}, \qquad g^2 d\mathfrak{x} + 8[gh_8]dx = 0$$

eliminiert, also

$$h = h_8, \quad m = 6, \quad n = 8, \quad \mu = 2 \quad \text{und} \quad \nu = 3$$

setzt. Wegen

$$g = -\frac{1}{2}[ff] \quad \text{und} \quad h_8 = 2[fg_4] \quad \text{folgt aber für} \quad fx_i = 0:$$

$$g = f_i f_i \quad \text{und} \quad h_8 = 2f_i g_4,$$

so daß man für $x = x_i$

$$\mathfrak{x} = 2\frac{g_4}{f_i}, \qquad f_i^2 d\mathfrak{x} + 8[f_i g_4]dx = 0$$

einführen kann. Dadurch wird

$$h = g_4, \qquad n = m - 2 = 4, \qquad \nu = 2,$$

und man erhält:

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{A}_0\mathfrak{x}^6 + \mathfrak{A}_1\mathfrak{x}^5 + \mathfrak{A}_2\mathfrak{x}^4 + \mathfrak{A}_3\mathfrak{x}^3 + \mathfrak{A}_4\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{A}_5\mathfrak{x} + \mathfrak{A}_6,$$

nebst $\mathfrak{A}_0 = D_6(f)$. Mithin werden die Invarianten $\mathfrak{A}_i$ von der Dimension

$$(\nu - 1)i + 2(m - 1) = i + 10,$$

und da die bikubische Funktion $f(\overset{6}{x})$ keine (schiefen) Invarianten von der 11-ten und 13-ten Dimension besitzt, so müssen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_3$ verschwinden, so daß die Gleichung hervorgeht:

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{A}_0\mathfrak{x}^6 + \mathfrak{A}_2\mathfrak{x}^4 + \mathfrak{A}_4\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{A}_5\mathfrak{x} + \mathfrak{A}_6 = 0. \text{[1]}$$

Hier werden $\mathfrak{A}_5$ und $\mathfrak{A}_6$ durch die Invarianten J_{XV} und $R(fg_4)$ ausgedrückt.

Setzt man nun

$$z = \mathfrak{x}\sqrt{\mathfrak{A}_0},$$

so ergibt sich die *kanonische Normalform der bikubischen Gleichung*:

$$z^6 + \mathfrak{A}_2 z^4 + \mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_0 z^2 + \mathfrak{A}_6\mathfrak{A}_0^2 = \pm\, \mathfrak{A}_5\mathfrak{A}_0^{\frac{3}{2}} z,$$

wofür wir

$$z^6 + 15A_2 z^4 + 15A_4 z^2 + A_6 = \pm\, A_5 z\sqrt{D_6^3} \text{ [2]}$$

schreiben wollen, also in formeller Übereinstimmung mit der bikubischen Resolvente von Jacobi.

Man kann daraus schließen, daß, wenn eine bikubische Gleichung von solcher Beschaffenheit ist, daß ihre kanonische Form sich auf die Jacobi'sche Resolvente einer Gleichung fünften Grades zurückführen läßt, die bikubischen Wurzeln durch die Wurzeln der letzteren Gleichung ausgedrückt werden können, mit anderen Worten, die Gleichung fünften Grades erscheint dann als Resolvente der Gleichung sechsten Grades.

Um die dazu erforderlichen Bedingungen etwas näher ins Auge zu fassen, legen wir die stets herbeiführbare kanonische Form des Art. 52 für die Gleichung fünften Grades zu Grunde, und setzen

$$B = D = 0, \quad \text{sodaß} \quad f(\overset{5}{x}) = Ax^5 + 10Cx^3 + 5Ex + F,$$

---

1) Brioschi, *Annali di Matem.* Ser. II, T. XI, p. 303 (1883).

2) Selbstverständlich läßt sich eine der vier Konstanten dieser Formel entfernen, wenn man z mit einem passenden Faktor multipliziert. Bekanntlich hat Herr Brill im Bd. 20 der *Mathem. Annalen* S. 345/6 die beiden Normalformen abgeleitet:

$$x^6 + 2px^5 + 3qx^4 + 4rx^3 + 3x^2 + 2px + q,$$

und

$$x^6 + ax^4 + 6bx^3 + cx^2 + 1,$$

welche gleichfalls nur *drei* wesentliche Konstanten enthalten, und von denen die letztere auch von Stephanos angegeben worden ist.

mit der Jacobi'schen Resolvente für $z = \frac{y}{\sqrt{20}} = \frac{A}{\sqrt{20}} \, \mathrm{S} \pm x_0 x_1$:

$$z^6 - 5Gz^4 + 5(G^2 - 2A')z^2 - 5(25H^2 - A\mathfrak{A}') = \pm Az\sqrt{D_5}\,.$$

Hier sind nach dem Früheren wegen $B = D = 0$ die Werte zu substituieren:

$$A' = -A^2E^2 + 4AC^2E - 3C^4\,, \qquad G = AE + 3C^2\,,$$

$$\mathfrak{A}' = A^2CF^2 + A^2E^3 + 14ACE^2 - 15C^4E\,, \qquad H = ACE - C^3\,,$$

$$D_5 = A^4F^4 + 32ACF^2(5A^2E^2 - 45AC^2E + 108C^4) + \\ + 256AE^3(AE - 5C^2)^2\,.$$

In der Funktion $f(\overset{5}{x})$ sind dann die Koeffizienten $ACEF$ so zu bestimmen, daß die Jacobi'sche Resolvente mit der bikubischen kanonischen Gleichung identifiziert werden kann. Dies geschieht durch die Erfüllung der Bedingungsgleichungen:

$$G = -3A_2\,, \qquad G^2 - 2A' = 3A_4\,,$$

$$25H^2 - A\mathfrak{A}' = -\frac{1}{5}A_6 \quad \text{und} \quad A^2D_5 = A_5^2D_6^3\,.$$

Es ist nun bemerkenswert, daß mittelst *quadratischer* Gleichungen die Werte von

$$A^3F^2 = \alpha\,, \qquad AE = \beta \quad \text{und} \quad C = \gamma$$

gefunden werden können aus:

$$\beta + 3\gamma^2 = -3A_2\,, \qquad 3\beta^2 - 2\beta\gamma^2 + 15\gamma^4 = 3A_4\,,$$

und

$$\beta^3 - 11\beta^2\gamma^2 + 35\beta\gamma^4 - 25\gamma^6 + \alpha\gamma = \frac{1}{5}A_6\,,$$

während

$$A^2D_5 \quad \text{oder} \quad \alpha^2 + 32\alpha\gamma(5\beta^2 - 45\beta\gamma^2 + 108\gamma^4) + 256\beta^3(\beta - 5\gamma^2)^2 = A_5^2D_6^3$$

sein muß. Da die Koeffizienten $A_2A_4A_5A_6$ nebst der Diskriminante D_6 als Invarianten von den Koeffizienten in $f(\overset{6}{x})$ rational abhängen, so ergibt die Elimination von $\alpha\beta\gamma$ aus den vorstehenden Formeln in rationaler Form die Bedingungsgleichung, welche zwischen den Koeffizienten der bikubischen Funktion $f(\overset{6}{x})$ erfüllt sein muß, damit ihre Wurzeln durch die der Funktion $f(\overset{5}{x})$ auf dem hier angedeuteten Wege rational ausdrückbar werden.

Wir wollen beispielshalber für die zu identifizierende bikubische kanonische Gleichung, die später als sogenannte Ikosaederresolvente mit dem Parameter ϖ sich ergebende Gleichung für $z = w$:

$$w^6 - 15w^4 + 75w^2 - 5(25 - 27\varpi) = \pm 54\varpi w$$

einführen, also

$$A_2 = -1\,, \quad A_4 = 5\,, \quad A_6 = 5(27\varpi - 25)\,, \quad \pm A_5\sqrt{D_6^3} = 54\varpi$$

substituieren. Setzt man zugleich für $A = 1$

$$\alpha = F^2, \quad \beta = E\,, \quad \gamma = C\,,$$

so wird

$$G = \beta^2 + 3\gamma = 3\,, \qquad G^2 - 2A' = 3\beta^2 - 2\beta\gamma^2 + 15\gamma^4 = 15\,,$$

und

$$\mathfrak{A}' - 25H^2 = \alpha\gamma + \beta^3 - 11\beta^2\gamma^2 + 35\beta\gamma^4 - 25\gamma^6 = 27\varpi - 25\,,$$

während

$$54\varpi = \pm\sqrt{D_5}\,;$$

oder

$$54\varpi^2 = \alpha^2 + 32\alpha\gamma(5\beta^2 - 45\beta\gamma^2 + 108\gamma^4) + 256\beta^3(\beta - 5\gamma^2)^2\,.$$

Aus diesen vier Gleichungen findet man die Werte von $\alpha\,\beta\,\gamma\,\varpi$ lediglich durch Ausziehung von Quadratwurzeln, und zwar ergibt sich ohne Schwierigkeit:

$$\alpha = \pm\,54(\varpi - 1)\,, \qquad \beta = \frac{9}{4}\,, \qquad \gamma = \pm\frac{1}{2}\,,$$

während ϖ beliebig bleibt, da die Gleichung für ϖ^2 von selbst erfüllt wird. Die doppelten Vorzeichen richten sich nach dem Vorzeichen der Diskriminante $\varDelta$ oder $G^3 - 27H^2$. Der entsprechende Ausdruck für f wird mithin

$$f = x^5 \pm 5x^3 + \frac{45}{4}x + \sqrt{\alpha} = 0\,.$$

Wir werden später sehen, daß diese Gleichung mit der in Art. 75 des VI. Kapitels betrachteten sogenannten Brioschi'schen Normalgleichung übereinstimmt, wenn man dort $b = \pm\frac{1}{2}$ setzt. Auf diesem Wege läßt sich also die bikubische Ikosaederresolvente auf die Brioschi'sche Resolvente fünften Grades, gleichfalls mit *einem* wesentlichen Parameter reduzieren, und die Wurzeln beider Gleichungen werden rational voneinander abhängig. In dem Abschnitte über die Ikosaedergleichung werden wir von der hier angedeuteten Reduktion Gebrauch machen.

Anhang, Abschnitt I.

V. Über Möbius' Kreisverwandtschaft und die Transformation durch reziproke Radien.

63.

Im ersten Kapitel des Buches sind einige Betrachtungen über die von Möbius eingeführte Kreisverwandtschaft enthalten, zu denen ich hier ein paar ergänzende Bemerkungen folgen lasse. Die zu Grunde liegende *allgemeine lineare Substitution* ist in Art. 3 in der Form angegeben:

$$apq + bp + cq + d = 0 \qquad \text{oder} \qquad p - s = \frac{\alpha q + \beta}{\gamma q + \delta},$$

während

$$r = \text{mod}\,(p - s) = |p - s|$$

für variable p die Gleichung eines Kreises vom Halbmesser r und dem Mittelpunkte s ausdrückt. Alsdann erhält man für den Kreis $\varrho = |q - \sigma|$ der verwandten Variablen q die Gleichungen

$$\varrho = r\left|\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma\gamma' r^2 - \alpha\alpha'}\right|, \qquad \sigma = \frac{\alpha'\beta - \gamma'\delta r^2}{\gamma\gamma' r^2 - \alpha\alpha'},$$

wo die akzentuierten Größen die konjugierten Werte bezeichnen. Soll der Kreis r durch die gegebenen Punkte $p_0 p_1 p_2$ gehen, so hat man

$$r = \left|\frac{(p_1 - p_2)(p_2 - p_0)(p_0 - p_1)}{\mathrm{S}\,(p_1 - p_2)\,p_0'}\right|, \qquad s = \frac{\mathrm{S}\,(p_1 - p_2)\,p_0 p_0'}{\mathrm{S}\,(p_1 - p_2)\,p_0'}.$$

Wenn die Punkte $p_0 p_1 p_2$ in einer *Geraden* liegen, so wird

$$\mathrm{S}\,(p_1 - p_2)\,p_0' = 0,$$

damit r und s unendliche Werte erhalten. Die Mittelpunkte s und σ verwandter Kreise werden im Allgemeinen nicht durch verwandte Punkte dargestellt, vielmehr ergibt sich der zu $p = s$ verwandte Punkt $q = t$ durch die Gleichung

$$0 = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta} \qquad \text{oder} \qquad t = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Ebensowenig darf man etwa die konjugierten Werte $p'q'$ verwandter Punkte gleichfalls für verwandt halten.

Betrachtet man den Kreis

$$r^2 = \frac{\alpha\alpha'}{\gamma\gamma'} \quad \text{oder} \quad r = \left|\frac{\alpha}{\gamma}\right| = \left|s + \frac{c}{a}\right| ,$$

so werden ϱ und σ unendlich, während die verwandten Punkte q auf einer Geraden liegen. Um die Gleichung dieser Geraden zu finden, setzen wir

$$p - s = \frac{\alpha}{\gamma} e^{\omega i} = \frac{\alpha q + \beta}{\gamma q + \delta}$$

oder

$$\left(q + \frac{\delta}{\gamma}\right)(e^{\omega i} - 1) = \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\delta}{\gamma} ,$$

wofür man auch schreiben kann:

$$\left(2q + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\delta}{\gamma}\right) i \operatorname{tg} \frac{1}{2}\omega = \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\delta}{\gamma} .$$

Zerfällt man diese Gleichung für $q = x' + y'i$ in den reellen und imaginären Teil, so geht nach Elimination von ω die Gleichung der Geraden in der gewöhnlichen reellen Form $\frac{y' - b'}{x' - a'} = c'$ hervor.

Da jede Kreislinie als Begrenzung sowohl des inneren, wie des äußeren Gebietes angesehen werden kann, so hat man, wenn zwei verwandte Kreise gegeben sind, die beiden Fälle zu unterscheiden, in denen die gleichnamigen oder die ungleichnamigen Gebiete verwandte Punkte enthalten, also durch die Kreisverwandtschaft *konform* aufeinander abgebildet werden. Wir bezeichnen die beiden Kreise dann entweder als *kogredient*, oder als *kontragredient*, und schon Möbius hat darauf hingewiesen (*die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung*, S. 541, 1855), daß dabei die entsprechenden Punkte der Kreise im gleichen oder entgegengesetzten Sinne durchlaufen werden.[1])

Die Entscheidung hängt offenbar ab von der Lage irgend zweier verwandter Punkte außerhalb der beiden Kreislinien. Wählt man dafür die Punkte

$$p' = \infty , \quad q' = -\frac{b}{a} , \quad \text{oder} \quad p'' = -\frac{c}{a} , \quad q'' = \infty ,$$

so gehören p' und q'' den äußeren Gebieten an, und es kommt bloß auf die Lage des Punktes q' in Bezug auf den Kreis q, oder des Punktes p''

1) Wenn zwei verwandte Kreise durch die Zusammengehörigkeit der Punkte $p_0 p_1 p_2$ und $q_0 q_1 q_2$ gegeben sind, so bewirkt eine Vertauschung zweier Punkte den Übergang von Kogredienz zur Kontragredienz, und umgekehrt.

in Bezug auf den Kreis p an. Möbius nennt die Punkte p'' und q' die *Zentralpunkte* der Kreisverwandtschaft. Auch kann man bemerken, daß wegen $apq + bp + cq + d = 0$ verwandte Punkte zusammenfallen, sobald sie einer Wurzel der quadratischen Gleichung

$$ax^2 + (b + c)x + d = 0$$

gleich werden. Alsdann handelt es sich nur um die Lage *eines* der beiden *invarianten* oder *Koinzidenzpunkte* x in Bezug auf zwei verwandte Kreise.

64.

Die allgemeine lineare Substitution können wir in der Gestalt schreiben:

$$\left(p + \frac{c}{a}\right)\left(q + \frac{b}{a}\right) = \frac{bc - ad}{aa},$$

oder wegen

$$a : b : c : d = \gamma : \delta : -(\alpha + \gamma s) : -(\beta + \delta s),$$

$$\left(p - s - \frac{\alpha}{\gamma}\right)\left(q + \frac{\delta}{\gamma}\right) = \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma\gamma}.$$

Setzt man hier spezieller

$$s = -\frac{c}{a}, \qquad \sigma = -\frac{b}{a} = -\frac{\delta}{\gamma},$$

so wird $\alpha = 0$ und man erhält

$$(p - s)(q - \sigma) = s\sigma - \frac{d}{a} = \frac{\beta}{\gamma}.$$

Sei nun

$$p - s = re^{\varphi i}, \qquad q - \sigma = \varrho e^{\psi i},$$

nebst

$$\frac{bc - ad}{a^2} = s\sigma - \frac{d}{a} = \frac{\beta}{\gamma} = \mathfrak{r}^2 e^{2\mathfrak{f} i},$$

so hat man

$$r\varrho = \mathfrak{r}^2, \qquad \varphi + \psi = 2\mathfrak{f},$$

mithin wird

$$r = \mathfrak{r}\varepsilon, \qquad \varrho = \frac{\mathfrak{r}}{\varepsilon}, \qquad \varphi = \mathfrak{f} + \chi, \qquad \psi = \mathfrak{f} - \chi,$$

oder

$$\varepsilon^2 = \frac{r}{\varrho}, \qquad 2\chi = \varphi - \psi.$$

Da $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{f}$ Konstanten der Verwandtschaft sind, so durchlaufen mit χ die Anomalien φ und ψ die vier Quadranten, aber im entgegengesetzten Sinne. Aus der Gleichung $\frac{r}{\mathfrak{r}} = \frac{\mathfrak{r}}{\varrho}$ geht hervor, daß wenn die Mittelpunkte der verwandten Kreise durch

$$s = -\frac{c}{a} \qquad \text{und} \qquad \sigma = -\frac{b}{a}$$

gegeben sind, also α verschwindet, das Produkt der Abstände $sp \cdot \overline{\sigma q}$ einen unveränderlichen Wert hat. Dann werden die Punkte $p = s$ und $q = \infty$ verwandt. Für $\varepsilon = 1$ liegen die verwandten Punkte auf kontragredienten Kreisen von gleichem Halbmesser, die Anomalien φ und ψ aber erhalten gleiche Werte für $\chi = 0$ und $\chi = \pi$.

65.

Als ein hervorstechendes Beispiel können wir die sogenannte *Transformation durch reziproke Radien* betrachten, bei welcher die invarianten Koinzidenzpunkte einem Kreise angehören, dessen sämtliche Punkte von den verwandten Punkten, wenn auch in entgegengesetzter Richtung, gleichzeitig durchlaufen werden. In diesem Falle werden das innere und äußere Gebiet des bezeichneten Koinzidenzkreises durch die genannte Transformation gegenseitig aufeinander abgebildet. Die dazu nötigen Bedingungen erfordern offenbar

$$\varepsilon = 1 \quad \text{und} \quad s = \sigma \quad \text{oder} \quad b = c \quad \text{nebst} \quad \alpha = \gamma s + \delta = 0\,,$$

während der Halbmesser des Koinzidenzkreises durch

$$\mathfrak{r}^2 = \left| s^2 - \frac{d}{a} \right| = \left| \frac{\beta}{\gamma} \right|$$

gegeben ist und $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f} + \pi$ die Anomalien der beiden invarianten Punkte

$$x = s \pm \mathfrak{r} e^{\mathfrak{f} i}$$

ausdrücken. Dann hat man für irgend zwei verwandte Punkte p und q (für beliebige Werte von ε):

$$\frac{\overline{sp}}{\mathfrak{r}} = \frac{\mathfrak{r}}{\overline{sq}} \quad \text{oder} \quad \overline{sp} \cdot \overline{sq} = \mathfrak{r}\mathfrak{r}\,,$$

wie die Transformation durch reziproke Radien vorschreibt. Dagegen sind die zugehörigen Anomalien aus dem Mittelpunkt s *nur gleich* in der Richtung der beiden Koinzidenzpunkte und entfernen sich von dieser Richtung kontragredient in entgegengesetztem Sinne um χ. Weiter folgt, daß zwei verwandte Kreise innerhalb und außerhalb des Koinzidenzkreises *kogredient* sein müssen, so lange sie den Mittelpunkt s, dessen verwandter Punkt im Unendlichen liegt, *nicht* einschließen. Im entgegengesetzten Falle dagegen bleibt die *Kontragredienz* bestehen.

Um zu einem *beliebigen* Kreise

$$|p - s_1| = r_1 \qquad \text{den verwandten Kreis} \qquad |q - \sigma_1| = \varrho_1$$

zu finden, hat man die Gleichungen zu kombinieren:

$$p = s + re^{\varphi i} = s_1 + r_1 e^{\varphi_1 i} \qquad \text{und} \qquad q = s + \varrho e^{\psi i} = \sigma_1 + \varrho_1 e^{\psi_1 i} \,,$$

da zwei verwandte Punkte p und q als Durchschnittspunkte der zugehörigen Kreise r und ϱ einerseits, mit den Kreisen r_1 und ϱ_1 andererseits, konstruiert werden können. Mithin wird für

$$s_1 - s = te^{ui}, \qquad \sigma_1 - s = \tau e^{vi},$$

$$(p - s)(q - s) = \mathfrak{r}^2 e^{2\mathfrak{f} i} = (te^{ui} + r_1 e^{\varphi_1 i})(\tau e^{vi} + \varrho_1 e^{\psi_1 i}) \,.$$

Nun hatten wir für $p - s_1 = \dfrac{\alpha_1 q + \beta_1}{\gamma_1 q + \delta_1}$ gefunden:

$$\varrho_1 = r_1 \left| \frac{\alpha_1 \delta_1 - \beta_1 \gamma_1}{\gamma_1 \gamma_1' r_1^2 - \alpha_1 \alpha_1'} \right| \qquad \text{und} \qquad \sigma_1 = \frac{\alpha_1' \beta_1 - \gamma_1' \delta_1 r_1^2}{\gamma_1 \gamma_1' r_1^2 - \alpha_1 \alpha_1'} \,,$$

wo

$$\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 : \delta_1 = s - s_1 : \ \mathfrak{r}^2 e^{2\mathfrak{f} i} + s(s_2 - s) \ : 1 : -s \,,$$

folglich

$$\varrho_1 = \frac{\mathfrak{r}^2 r_1}{t^2 - r_1^2} \qquad \text{und} \qquad \sigma_1 - s = \frac{\mathfrak{r}^2 t}{t^2 - r_1^2} \, e^{(2\mathfrak{f} - u)i} \,,$$

oder

$$\tau e^{(u+v)i} = \frac{\mathfrak{r}^2 t}{t^2 - r_1^2} \, e^{2\mathfrak{f} i} \,, \qquad \text{d. h.} \qquad \tau = \frac{\mathfrak{r}^2 t}{t^2 - r_1^2}$$

und

$$u + v = 2\mathfrak{f} \,, \qquad \text{mithin} \qquad \varphi - u = v - \psi \,.$$

Wenn jedoch s *innerhalb* des Kreises r_1 gelegen ist, also $t < r_1$ wird, so erhält man die Werte

$$\varrho_1 = \frac{\mathfrak{r}^2 r_1}{r_1^2 - t^2} \qquad \text{und} \qquad \tau = \frac{\mathfrak{r}^2 t}{r_1^2 - t^2} \,,$$

während

$$u + v = 2\mathfrak{f} \pm \pi \qquad \text{nebst} \qquad \varphi - u = \pi - (\psi - v)$$

folgt. In beiden Fällen wird

$$\varrho_1 t = r_1 \tau \qquad \text{oder} \qquad \frac{\varrho_1}{r_1} = \frac{\tau}{t} \,,$$

und die Halbmesser verwandter Kreise verhalten sich wie die Abstände ihrer Mittelpunkte von s, so daß gleichzeitig $t \gtrless r_1$ und $\tau \gtrless \varrho_1$. Für $t > r_1$ stellt die Größe

$$t^2 - r_1^2 = (t - r_1)(t + r_1) = rr'$$

das Produkt von zwei zur nämlichen Anomalie φ gehörigen Vektoren r und r' der Punkte p und p' dar. Für

$$t < r_1 \qquad \text{und} \qquad r_1^2 - t^2 = rr'$$

dagegen werden r und r' die Teile einer durch s gezogenen Sehne zwischen den Punkten p und p' mit den Anomalien φ und $\varphi + \pi$.

66.

Man kann daher auch schreiben

$$\varrho_1 = \frac{r_1}{r'}\,\varrho = \frac{r_1}{r}\,\varrho' , \qquad \tau = \frac{\varrho}{r'}\,t = \frac{\varrho'}{r}\,t ,$$

woraus folgt, daß die Proportion besteht:

$$\varrho : \varrho' : \varrho_1 : \tau = r' : r : r_1 : t ,$$

und die Dreiecke ss_1p und $s\sigma_1 q'$, sowie ss_1p' und $s\sigma_1 q$, einander ähnlich werden. Die Ungleichung $t > r_1$ entspricht der Kogredienz, $t < r_1$ der Kontragredienz der verwandten Kreise.

Wegen $\varphi + \psi = 2\mathfrak{f}$ gehören zu den Anomalien φ und ψ je zwei Paare verwandter Punkte pq und $p'q'$, so daß wenn

$$t > r_1 , \quad r_1 = t \sin w , \quad \varphi - u = \pm w \quad \text{und} \quad \psi - v = \mp w ,$$

die Berührungspunkte $t\,\tau_1'$, sowie $t_1'\,\tau$, (mit vertauschter Ordnung) der von s an beide Kreise gezogenen Tangenten, verwandte Punkte werden. Dann erhält man

$$\varphi_1 = u + w + \frac{\pi}{2} , \qquad \varphi_1' = u - w - \frac{\pi}{2} , \qquad \psi_1 = v - w - \frac{\pi}{2} ,$$

$$\psi_1' = v + w + \frac{\pi}{2} , \qquad \varphi_1 + \psi_1 = \varphi_1' + \psi_1' = u + v = 2\mathfrak{f} .$$

Im Übrigen ergeben sich für $t > r_1$, $\varphi = u$, $\psi = v$ als verwandte Punkte:

$$p_1 - s = (t + r_1)e^{ui} , \qquad q_1 - s = (\tau - \varrho_1)e^{vi} ,$$

nebst

$$p_1' - s = (t - r_1)e^{ui} , \qquad q_1' - s = (\tau + \varrho_1)e^{vi} ,$$

sowie für $t < r_1$, $\varphi = u$ oder $\psi = v$:

$$p_1 - s = (r_1 + t)e^{ui} , \qquad q_1 - s = (\varrho_1 - \tau)e^{(v+\pi)i} ,$$

$$p_1' - s = (r_1 - t)e^{(u+\pi)i} , \qquad q_1' - s = (\varrho_1 + \tau)e^{vi} .$$

Da für verwandte Punkte

$$\mathfrak{r}^2 = r\varrho = r'\varrho' ,$$

so folgt

$$\mathfrak{r}^2 = \pm (t + r_1)(\tau - \varrho_1) = \pm (t - r_1)(\tau + \varrho_1) = \pm (t\tau - r_1\varrho_1) .$$

Nun liefert die Gleichung

$$\mathfrak{r}^2 = e^{(u+v-2\mathfrak{f})i}\left(t + r_1\, e^{(\varphi_1 - u)i}\right)\left(\tau + \varrho_1\, e^{(\psi_1 - v)i}\right) ,$$

wenn man zur Abkürzung $\varphi' = \varphi_1 - u$, $\psi' = \psi_1 - v$ schreibt:

$$\tau^2 = \pm (t + r_1 e^{\varphi' i})(\tau + \varrho_1 e^{\psi' i}),$$

folglich auch

$$t\tau - r_1 \varrho_1 = t\tau + r_1 \varrho_1 \cos(\varphi' + \psi') + r_1 \tau \cos\varphi' + t\varrho_1 \cos\psi',$$

oder

$$0 = r_1 \{1 + \cos(\varphi' + \psi')\} + t\{\cos\varphi' + \cos\psi'\}\ ^{1)}.$$

Die Dreiecke ss_1p und $s\sigma_1 q$ ergeben

$$r^2 = r_1^2 + 2r_1 t \cos\varphi' + t^2 \qquad \text{und} \qquad \varrho^2 = \varrho_1^2 + 2\varrho_1 \tau \cos\psi' + \tau^2.$$

Da aber $\varrho : \varrho_1 : \tau = r' : r_1 : t$, so wird auch

$$r'^2 = r_1^2 + 2r_1 t \cos\psi' + t^2,$$

mithin wegen $t^2 = r_1^2 \pm rr'$:

$$(r \mp r')^2 = 2r_1\{2r_1 + t(\cos\varphi' + \cos\psi')\},$$

und durch Elimination von $t(\cos\varphi' + \cos\psi')$:

$$(r \mp r')^2 = 2r_1^2\{1 - \cos(\varphi' + \psi')\}$$

oder

$$r \mp r' = \pm 2r_1 \sin\frac{1}{2}(\varphi' + \psi').$$

In dem gleichschenkligen Dreieck s_1pp' mit dem Winkel

$$\varpi = sps_1 = sp's_1 = \varphi_1 - \varphi$$

hat man

$$r \mp r' = 2r_1 \cos(\varphi_1 - \varphi),$$

folglich

$$\sin\frac{1}{2}(\varphi' + \psi') = \pm \cos(\varphi_1 - \varphi) = \sin(\varphi_1 - \varphi \pm \frac{\pi}{2}),$$

d. h.

$$\varphi' + \psi' = 2(\varphi_1 - \varphi) \pm \pi \qquad \text{oder} \qquad \psi' = \varphi' - 2(\varphi - u) + \pi,$$

wofür man im Falle $t > r_1$ auch schreiben kann

$$\psi_1 - \psi = \varphi_1 - \varphi + \pi,$$

während für $t < r_1$ hervorgeht:

$$\psi_1 - \psi = \varphi_1 - \varphi.$$

---

1) Die weitere Gleichung

$$0 = r_1 \sin(\varphi' + \psi') + t(\sin\varphi' + \sin\psi')$$

ist davon nur der Form nach unterschieden, wie die goniometrische Relation lehrt:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi' + \psi') = \frac{\sin\varphi' + \sin\psi'}{\cos\varphi' + \cos\psi'}.$$

Dies ergibt sich auch direkt aus den nachstehenden Figuren, welche die beiden Fälle der Kogredienz und der Kontragredienz veranschaulichen. Denn während in den Kreisen um s_1

$$\varphi - u = pss_1 \qquad \text{und} \qquad \pi - \varphi' = ps_1 s \ ,$$

erhält man im ersten Falle (Fig. 1):

$$v - \psi = qs\sigma_1 \qquad \text{und} \qquad \psi' - \pi = q\sigma_1 s \ ,$$

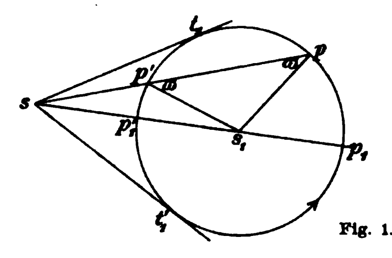
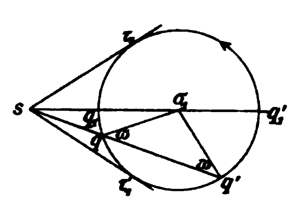



Fig. 1.

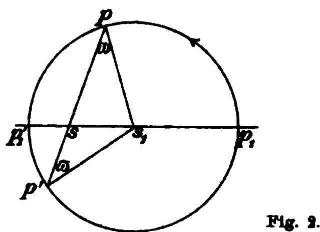
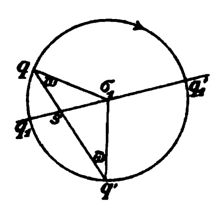



Fig. 2.

im zweiten dagegen (Fig. 2):

$$\psi - v = qs\sigma_1 \qquad \text{und} \qquad \pi - \psi' = q\sigma_1 s \ ,$$

und damit die Werte

$$\varpi = \varphi_1 - \varphi = \psi_1 - \psi - \pi$$

einerseits, sowie $\varpi = \varphi_1 - \varphi = \psi_1 - \psi$ andererseits.

67.

Im engeren Sinne pflegt man unter der *Transformation durch reziproke Radien* die Abbildung zu verstehen, welche neben der Gleichung $\mathfrak{r}^2 = r\varrho$ die Forderung $\varphi = \psi$ erfüllt, so daß

$$p - s = re^{\varphi i} \qquad \text{neben} \qquad q - s = \varrho e^{\varphi i}$$

zu setzen ist. Hierbei bleibt allerdings die Eigenschaft der Kreisverwandtschaft bestehen, aber im Übrigen findet eine wesentliche Verschiedenheit mit den bisher erörterten Fällen statt. In der Tat darf man bemerken, daß konforme Abbildungen, bei denen verwandte Kreise einander ent-

sprechen, auch ohne das Stattfinden linearer Relationen, oder selbst einer Gleichung von der Form $F(p, q) = 0$, erhalten werden können. Differen-

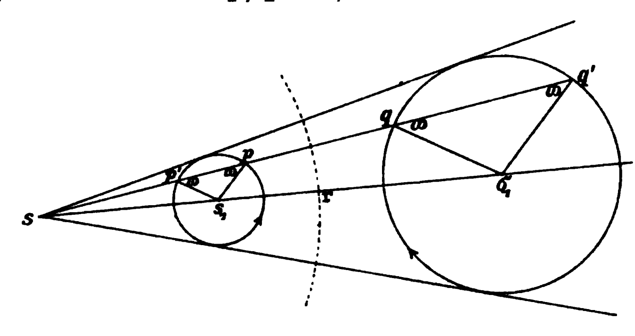


Fig. 3.

------ bezeichnet den invarianten Koinzidenzkreis.

tiiert man z. B. die obigen Werte von p und q, so erhält man

$$dp = e^{\varphi i}(dr + r i d\varphi)\,, \qquad dq = -\left(\frac{\mathfrak{r}}{r}\right)^2 e^{\varphi i}(dr - r i d\varphi)\,,$$

also

$$\operatorname{mod}\frac{dq}{dp} = \left|\frac{dq}{dp}\right| = \left(\frac{\mathfrak{r}}{r}\right)^2, \qquad \text{nebst} \qquad \left|\frac{dp}{\delta p}\right| = \left|\frac{dq}{\delta q}\right|,$$

womit die Bedingung der Konformität erfüllt ist.[1])

Unter der jetzigen Voraussetzung liegen auf dem mit dem Halb-

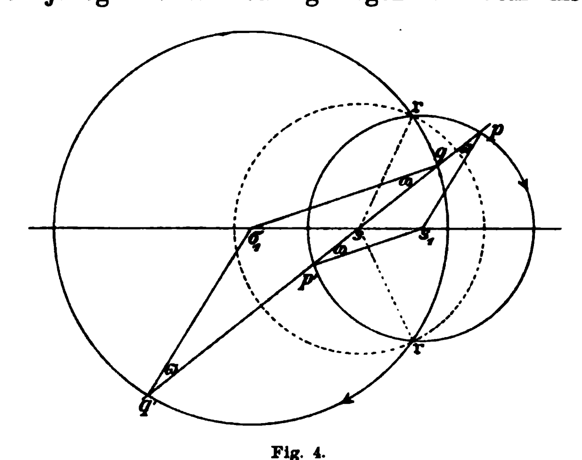


Fig. 4.

messer $\mathfrak{r}$ um s beschriebenen Kreise *lauter invariante oder Koinzidenzpunkte*, während überhaupt verwandte Kreise aus dem Mittelpunkt s in demselben Sinne durchlaufen werden, also *kogredient* sind. Die nämliche Eigenschaft kommt allen verwandten Kreisen zu, die das Zentrum s einschließen.

1) Vgl. oben S. 11.

Umgekehrt sind die entsprechenden Kreise außerhalb dieses Zentrums *kontragredient.* Dieses Resultat widerspricht allerdings dem oben angeführten Satze von Möbius, nach welchem „*je zwei einander entsprechende Kreisbewegungen gleichnamigen Sinnes sind, oder nicht, je nachdem sie beide die Zentralpunkte ihrer Ebenen aus- oder einschließen.*“ Man überzeugt sich indessen leicht, daß die von Möbius gegebene Ableitung auf Stetigkeitsbetrachtungen beruht, die beim Durchgang durch den jetzigen *invarianten* Koinzidenzkreis ihre Geltung verlieren.[1])

Um allgemein zu untersuchen, wie die zu einem *beliebigen* Kreise $p - s_1 = r_1 e^{\varphi_1 i}$ verwandten Punkte gelegen sind, vergleichen wir für $r\varrho = \mathfrak{r}^2$ die Ausdrücke

$$p = s + re^{\varphi i} = s_1 + r_1 e^{\varphi_1 i} \qquad \text{und} \qquad q = s + \varrho e^{\varphi i} = \sigma_1 + \varrho_1 e^{\psi_1 i} ,$$

und setzen wie früher:

$$s_1 = s + te^{ui} , \qquad \sigma_1 = s + \tau e^{vi} ,$$

$$\tau = \pm \frac{\mathfrak{r}^2 t}{t^2 - r_1^2} = \frac{\varrho}{r'} t , \qquad \varrho_1 = \pm \frac{\mathfrak{r}^2 r_1}{t^2 - r_1^2} = \frac{\varrho}{r'} r_1 .$$

Für $t > r_1$ folgt daraus

$$v = u , \quad \psi' = 2(\varphi - u) - \varphi' + \pi , \quad \varphi_1 + \psi_1 = 2\varphi + \pi ,$$

während für $t < r_1$ erhalten wird:

$$v = u + \pi , \quad \psi' = 2(\varphi - u) - \varphi' , \quad \varphi_1 + \psi_1 = 2\varphi + \pi .$$

Zur Verifikation braucht man bloß das Produkt $(p - s)(q - s)$ zu bilden und von der Gleichung

$$t \sin(\varphi - u) = r_1 \sin \varpi$$

Gebrauch zu machen. Dann ergibt sich nach leichter Reduktion einfach die identische Relation

$$\varpi = \varphi' - \varphi + u = \varphi_1 - \varphi .$$

1) Vgl. die zugehörigen Figuren 3 und 4.

Anhang, Abschnitt II.

VI. Zur Theorie der Tschirnhaus-Transformation.

68.

Meiner Arbeit über die Theorie der linearen Transformationen habe ich einige Anwendungen der algebraischen Invariantentheorie folgen lassen und dabei namentlich von der *typischen* Gleichung Hermite's für

$$z = \frac{f}{x-y} - f_{\prime}, \qquad f = a_0 x^m + \widehat{m}_1 a_1 x^{m-1} \ldots, \qquad f_{\prime} = \frac{1}{m} f'x,$$

während

$$f y = a_0 \prod_{k=0}^{m-1} (y - x_k) = 0,$$

Gebrauch gemacht. In den *Comptes rendus* vom 24. Mai 1858 hat nun Hermite an den Ausdruck

$$z = \eta_1 x^{m-2} + \eta_2 x^{m-3} \cdots + \eta_{m-2} x + \eta_{m-1},$$

wo zufolge S. 48 des ersten Kapitels

$$\eta_i(y) = a_0 y^i + \widehat{m}_1 a_1 y^{i-1} \cdots + \widehat{m}_{i-1} a_{i-1} y + \widehat{m-1}_{i-1} a_i,$$

die interessante Bemerkung geknüpft, daß wenn

$$g\binom{m-2}{x} = b_0 x^{m-2} + \widehat{m-2}_1 b_1 x^{m-3} + \widehat{m-2}_2 b_2 x^{m-4} \cdots + b_{m-2}$$

gesetzt wird, die in den Koeffizienten a und b bilineare Tschirnhaus-Transformation

$$w = b_0 \eta_{m-1} - b_1 \eta_{m-2} + b_2 \eta_{m-3} \cdots + (-1)^m b_{m-2} \eta_1 = \varphi\binom{m-1}{y},$$

angewandt auf die Gleichung $fy = 0$, zu einer Gleichung m-ten Grades von der Form führt:

$$w^m + \widehat{m}_2 c_2 w^{m-2} + \widehat{m}_3 c_3 w^{m-3} \cdots + c_m = \psi(w) = 0,$$

deren Koeffizienten *simultane Invarianten* von f und g sind, während der Koeffizient von w^{m-1} verschwindet.

In der Tat erhält man vermöge der Newton'schen Formeln

$$\mathop{\mathrm{S}}_k \eta_i(x_k) = a_0 s_i + \widehat{m}_1 a_1 s_{i-1} \cdots \widehat{m}_{i-1} a_{i-1} s_1 + \widehat{m-1}_{i-1} a_i s_0 = 0,$$

und damit $\mathrm{S}\, w_k = 0$, wenn die Summe auf die Wurzeln x_k ausgedehnt wird. Es bleibt dann zu zeigen, daß, wenn infolge linearer Transformation für

$$\varrho = \delta_2 \xi + \delta_3, \quad \varrho y = \delta \xi + \delta_1, \quad \varepsilon = (\delta_2 \xi + \delta_3)(\delta - \delta_2 y) = \delta\delta_3 - \delta_1 \delta_2,$$

$$\varrho^m f(ya) = f(\xi\alpha) \qquad \text{und} \qquad \varrho^{m-2} g(yb) = g(\xi\beta),$$

gesetzt wird, auch

$$\varepsilon^{m-1} w(yab) = w(\xi\alpha\beta)$$

sein muß.[1])

Man kann dabei von dem Falle $w = z$ oder $b_i = (-x)^i$ ausgehen, wodurch

$$g(yb) = (y - x)^{m-2}$$

und

$$\beta_i = (\delta_1 - \delta_3 x)^i (\delta - \delta_2 x)^{m-i-2} = b_0 \delta^{m-i-2} \delta_1^i + \cdots + b_{m-2} \delta_2^{m-i-2} \delta_3^i,$$

oder nach Art. 4 des ersten Kapitels

$$\varepsilon^{m-2} b_i = (-1)^i \left\{ \beta_0 \delta_1^i \delta_3^{m-i-2} \mp \cdots + (-1)^m \beta_{m-2} \delta^i \delta_2^{m-i-2} \right\}$$

wird, während die Gleichung $\psi(w) = 0$ einfach mit der typischen Gleichung zusammenfällt, deren Koeffizienten Kovarianten von f sind. Die Funktion

$$\varphi(yab) = w = b_0 \eta_{m-1} - b_1 \eta_{m-2} \pm \cdots$$

hat die Eigenschaft, für $b_i = (-x)^i$ überzugehen in

$$z = \frac{f(xa)}{x - y} - f_{\prime}(xa).$$

Bildet man nun für $\eta_i(\xi\alpha) = \eta_i'$ den entsprechenden Ausdruck

$$\varphi(\xi\alpha b') = w' = b_0' \eta_{m-1}' - b_1' \eta_{m-2}' \pm \cdots,$$

und schreibt

$$x' = \frac{\delta_3 x - \delta_1}{\delta - \delta_2 x} \qquad \text{oder} \qquad x = \frac{\delta x' + \delta_1}{\delta_2 x' + \delta_3},$$

so reduziert sich w' für $b_i' = (-x')^i$ auf

$$z' = \frac{f(x'\alpha)}{x' - \xi} - f_{\prime}(x'\alpha) = \varepsilon(\delta_2 x' + \delta_3)^{m-2} \left\{ \frac{f(xa)}{x - y} - f_{\prime}(xa) \right\}$$

$$= \varepsilon (\delta_2 x' + \delta_3)^{m-2} z = \frac{\varepsilon^{m-1}}{(\delta - \delta_2 x)^{m-2}} z,$$

---

1) Weber, *Algebra* Bd. I, § 69 (75); vgl. auch Cayley's *Notes on Tschirnhausen's Transformation* (*Math. Papers* IV, Nr. 273—275).

wie sich leicht ergibt wegen

$$f(x'\alpha) = (\delta_2 x' + \delta_3)^m f(xa)\,,$$

$$f_1(x'\alpha) = \delta_2(\delta_2 x' + \delta_3)^{m-1} f(xa) + \varepsilon(\delta_2 x' + \delta_3)^{m-2} f_1(xa)\,.$$

Die gefundene Gleichung

$$(\delta - \delta_2 x)^{m-2}(\eta_1' x'^{m-2} + \eta_2' x'^{m-3} + \cdots) = \varepsilon^{m-1}(\eta_1 x^{m-2} + \eta_2 x^{m-3} + \cdots)$$

wird identisch vermöge der zwischen x und x' aufgestellten Beziehung, und da es sich hier nur um *lineare* Relationen zwischen den Koeffizienten b_i und b_i' handelt, während x ganz beliebig ist, so darf man in den identischen Gleichungen die Werte $(-x)^i = b_i$ und $(-x')^i = b_i'$ einführen. Dadurch erhält man zunächst

$$(\delta - \delta_2 x)^i(-x')^i = (\delta_1 - \delta_3 x)^i\,,$$

also

$$(\delta - \delta_2 x)^{m-2} b_i' = (\delta_1 - \delta_3 x)^i (\delta - \delta_2 x)^{m-i-2} = \beta_i\,,$$

und weiter

$$(\delta - \delta_2 x)^{m-2} \varphi(\xi\alpha b') = \varphi(\xi\alpha\beta) = \varepsilon^{m-1}\varphi(yab)\,,$$

oder

$$\varepsilon^{m-1} w(x_k a\, b) = w(\xi_k \alpha\beta)\,.$$

Da nun die Koeffizienten c_i in ψ durch homogene Funktionen der Potenzsummen $\mathop{S}\limits_k w_k^i = \sigma_i$ ausgedrückt werden, so folgt aus

$$\varepsilon^{i(m-1)} \mathop{S}\limits_k w_k^i(y\,a\,b) = \mathop{S}\limits_k w_k^i(\xi\,\alpha\,\beta)\,,$$

$$\varepsilon^{i(m-1)} c_i(ab) = c_i(\alpha\beta)\,,$$

d. h. c_i ist eine simultane Invariante der Funktionen f und g von den Dimensionen $\mu = \nu = i$ und dem Gewicht $i(m-1)$. Zugleich läßt sich für

$$\sigma = \delta - \delta_2 y\,, \qquad \sigma\xi = \delta_3 y - \delta_1$$

die identische Gleichung bilden:

$$\varepsilon^{m-1}(\delta - \delta_2 y)^{m-1} w(y\,a\,b) = f \cdot v + \sigma^{m-1} w(\xi\,\alpha\,\beta)\,,$$

wo $v\binom{m-2}{y}$ auf den $m-2$-ten Grad steigt und das Produkt $f \cdot v$ für $x = x_k$ verschwindet.

Wir erinnern hier noch an die gleichfalls auf Hermite zurückzuführende[1]) Benutzung des Ausdruckes

$$w = b_0 \eta_{m-1} - b_1 \eta_{m-2} \pm \cdots + (-1)^m b_{m-2}\eta_1\,,$$

als *erzeugender* Funktion zur Bestimmung der Anzahl der innerhalb ge-

1) *Comptes rendus* 1853 I, vgl. Borchardt in *Crelle's Journal* Bd. 58, S. 281.

gebener Grenzen enthaltenen reellen Wurzeln der Gleichung $fy = 0$. Bildet man nämlich für einen reellen Wert r, als quadratische Form der reellen Koeffizienten b_i die Summe

$$\mathop{S}_{k} (x_k - r) w_k^2 ,$$

so ist vermöge des sogen. Jacobi-Sylvester'schen Trägheitsgesetzes die Zahl der positiven (p) und der negativen Glieder (n) der Summe unabhängig von der Wahl der b, resp. der Funktion g, so daß die Zerfällung $m = n + p$ nur noch durch r und f bestimmt wird. Dabei ist zu beachten, daß wegen $S w_k = 0$ die m linearen Aggregate w_k nur von $m - 1$ Größen b_i abhängen. Da x_k und w_k gleichzeitig reell und komplex werden, so ist im *ersten* Falle das Glied $(x_k - r) w_k^2$ positiv für $x_k > r$, negativ für $x_k < r$, während im *zweiten* Falle zwei konjugierte Wurzeln x_k und $x_{k'}$ ein positives und ein negatives Glied geben. Daraus folgt, daß die Zahl p zusammengesetzt ist aus der Zahl der komplexen Wurzelpaare und der Zahl der reellen Wurzeln $> r$. Will man daher die Zahl der reellen Wurzeln zwischen r und $r' > r$ berechnen, so hat man einfach die Differenz $p - p'$ zu untersuchen.

69.

Dem Ausdruck für w kann man verschiedene Formen geben. Die Gleichung $w = \varphi(\overset{m-1}{y})$ z. B. liefert $y = x_k$, $k = 0, 1 \cdots m - 1$:

$$w_k = \gamma_0 x_k^{m-1} + \gamma_1 x_k^{m-2} + \gamma_2 x_k^{m-3} \cdots \gamma_{m-1} ,$$

und hier lassen sich die Koeffizienten γ_i durch die zusammengehörigen Werte x_k und w_k ausdrücken. Man erhält[1])

$$\gamma_i = \frac{1}{m} \mathop{S}_{k=0}^{m-1} \frac{a_0 x_k^i + \widehat{m}_1 a_1 x_k^{i-1} \cdots + \widehat{m}_i a_i}{f_{\prime}(x_k)} w_k ,$$

und verifiziert damit ohne Schwierigkeit für $y = x_k$ die Gleichung

$$\mathop{S}_{i=0}^{m-1} \gamma_i y^{m-i-1} = w .$$

Die Tschirnhaus-Transformation $w = (m - 1) f_{\prime}(y)$ führt direkt zur typischen Gleichung für $x = x_k$.

Übrigens ist es nicht schwer, die Gleichung für ψw in der Form einer Determinante m-ter Ordnung zu entwickeln, wenn man für $i = 1, 2 \cdots m - 1$ die Produkte berechnet (Weber, *Algebra* I, § 72/78):

$$w \cdot \eta_i = \delta_0^{(i)} \eta_{m-1} + \delta_1^{(i)} \eta_{m-2} + \delta_2^{(i)} \eta_{m-3} \cdots + \delta_{m-2}^{(i)} \eta_1 - \varrho_i ,$$

1) Vgl. z. B. Baltzer's *Determinanten* § 10, II.

wozu für $i = 0$ und $\delta_k = (-1)^k b_k$ die Gleichung tritt

$$w = \delta_0 \eta_{m-1} + \delta_1 \eta_{m-2} + \delta_2 \eta_{m-3} \cdots + \delta_{m-2} \eta_1 .$$

Dann ergibt die Elimination der Größen $\eta_1 \eta_2 \cdots \eta_{m-1}$:

$$\pm \psi w = \begin{vmatrix} \delta_0 & \delta_1 & \delta_2 & \cdots \delta_{m-3} & \delta_{m-2} & w \\ \delta_0' & \delta_1' & \delta_2' & \cdots \delta_{m-3}' & \delta_{m-2}' - w & \varrho_1 \\ \delta_0'' & \delta_1'' & \delta_2'' & \cdots \delta_{m-3}'' - w & \delta_{m-2}'' & \varrho_2 \\ & \cdots & & & \cdots & \\ \delta_0^{(m-2)} & \delta_1^{(m-2)} - w & \delta_2^{(m-2)} & \cdots \delta_{m-3}^{(m-2)} & \delta_{m-2}^{(m-2)} & \varrho_{m-2} \\ \delta_0^{(m-1)} - w & \delta_1^{(m-1)} & \delta_2^{(m-1)} & \cdots \delta_{m-3}^{(m-1)} & \delta_{m-2}^{(m-1)} & \varrho_{m-1} \end{vmatrix} .$$

Hier sind noch die Koeffizienten $\delta_k^{(i)}$ und ϱ_i zu bilden. Dies kann geschehen, indem man mittelst des Gleichungensystems

$$\eta_1 = a_0 y + a_1 ,$$

$$\eta_2 = y \eta_1 + \widehat{m-1}_1 (a_1 y + a_2) ,$$

$$\eta_3 = y \eta_2 + \widehat{m-1}_2 (a_2 y + a_3) ,$$

$$\cdots$$

$$\eta_{i+1} = y \eta_i + \widehat{m-1}_i (a_i y + a_{i+1}) ,$$

$$\cdots$$

$$\eta_{m-1} = y \eta_{m-2} + \widehat{m-1}_1 (a_{m-2} y + a_{m-1}) ,$$

nebst

$$\eta_0 = 0 \quad \text{und} \quad \eta_m = y \eta_{m-1} + a_{m-1} y + a_m = 0 ,$$

zunächst den von den beiden Hilfsgrößen δ_{m-1} und ϱ' abhängigen Ausdruck ableitet:

$$y w = \delta_0 y \eta_{m-1} + \delta_1 y \eta_{m-2} \cdots + \delta_{m-2} y \eta_1 ,$$

$$= \delta_1 \eta_{m-1} + \delta_2 \eta_{m-2} \cdots + \delta_{m-1} \eta_1 - \varrho' ,$$

wo

$$0 = a_0 \delta_{m-1} + \widehat{m-1}_1 a_1 \delta_{m-2} + \widehat{m-1}_2 a_2 \delta_{m-3} \cdots + a_{m-1} \delta_0 ,$$

$$\varrho' = a_1 \delta_{m-1} + \widehat{m-1}_1 a_2 \delta_{m-2} + \widehat{m-1}_2 a_3 \delta_{m-3} \cdots + a_m \delta_0 .$$

Obgleich wegen $y = \frac{\eta_1 - a_1}{a_0}$ die Größen δ_{m-1} und ϱ' den Nenner a_0 besitzen, sind hier

$$\delta_{m-1} \eta_1 - \varrho' , \quad a_0 \delta_{m-1} \quad \text{und} \quad \varrho' - a_1 \delta_{m-1}$$

ohne Nenner, im Einklang mit der Gleichung

$$\delta_{m-1} \eta_1 - \varrho' = \delta_{m-1} (\eta_1 - a_1) - (\varrho' - a_1 \delta_{m-1}) .$$

Auch hat man für $i = 1$:

$$w\eta_1 = a_0 y w + a_1 w = \delta_0'\eta_{m-1} + \delta_1'\eta_{m-2} \cdots + \delta_{m-2}'\eta_1 - \varrho_1,$$

$$= a_0(\delta_1\eta_{m-1} + \delta_2\eta_{m-2} \cdots + \delta_{m-1}\eta_1 - \varrho') +$$

$$+ a_1(\delta_0\eta_{m-1} + \delta_1\eta_{m-2} \cdots + \delta_{m-2}\eta_1),$$

folglich

$$\delta_0' = a_0\delta_1 + a_1\delta_0, \qquad \delta_1' = a_0\delta_2 + a_1\delta_1 \ldots \quad \text{bis}$$

$$\delta_{m-2}' = a_0\delta_{m-1} + a_1\delta_{m-2}, \qquad \varrho_1 = a_0\varrho'.$$

Ferner bilde man analog mit den Hilfsgrößen $\delta_{m-1}^{(i)}$ und ϱ_i' das Produkt

$$yw\eta_i = \delta_0^{(i)} y\eta_{m-1} + \delta_1^{(i)} y\eta_{m-2} \cdots + \delta_{m-2}^{(i)} y\eta_1 - y\varrho_i,$$

$$= \delta_1^{(i)}\eta_{m-1} + \delta_2^{(i)}\eta_{m-2} \cdots + \delta_{m-2}^{(i)}\eta_2 + \delta_{m-1}^{(i)}\eta_1 - \varrho_i',$$

wo $\delta_{m-1}^{(i)}$ und ϱ_i' durch die Gleichungen bestimmt sind:

$$\varrho_i = -\left(a_0\delta_{m-1}^{(i)} + \widehat{m-1}_1 a_1\delta_{m-2}^{(i)} \cdots + \widehat{m-1}_1 a_{m-2}\delta_1^{(i)} + a_{m-1}\delta_0^{(i)}\right),$$

$$\varrho_i' = a_1\delta_{m-1}^{(i)} + \widehat{m-1}_1 a_2\delta_{m-2}^{(i)} \cdots + \widehat{m-1}_1 a_{m-1}\delta_1^{(i)} + a_m\delta_0^{(i)},$$

und ϱ_i, so wie $a_0\delta_{m-1}^{(i)}$ nebst $\varrho_i' - a_1\delta_{m-1}^{(i)}$ keine Nenner besitzen.

Setzt man nun

$$w\eta_{i+1} = \delta_0^{(i+1)}\eta_{m-1} + \delta_1^{(i+1)}\eta_{m-2} \cdots + \delta_{m-2}^{(i+1)}\eta_1 - \varrho_{i+1},$$

$$= yw\eta_i + \widehat{m-1}_i a_i y w + \widehat{m-1}_i a_{i+1} w,$$

$$= \delta_1^{(i)}\eta_{m-1} + \delta_2^{(i)}\eta_{m-2} \cdots + \delta_{m-1}^{(i)}\eta_1 - \varrho_i' +$$

$$+ \widehat{m-1}_i a_i(\delta_1\eta_{m-1} + \delta_2\eta_{m-2} \cdots + \delta_{m-1}\eta_1 - \varrho') +$$

$$+ \widehat{m-1}_i a_{i+1}(\delta_0\eta_{m-1} + \delta_1\eta_{m-2} \cdots + \delta_{m-2}\eta_1),$$

so ergeben sich die Relationen:

$$\delta_0^{(i+1)} = \delta_1^{(i)} + \widehat{m-1}_i a_i\delta_1 + \widehat{m-1}_i a_{i+1}\delta_0,$$

$$\delta_1^{(i+1)} = \delta_2^{(i)} + \widehat{m-1}_i a_i\delta_2 + \widehat{m-1}_i a_{i+1}\delta_1,$$

$$\cdots$$

$$\delta_{m-2}^{(i+1)} = \delta_{m-1}^{(i)} + \widehat{m-1}_i a_i\delta_{m-1} + \widehat{m-1}_i a_{i+1}\delta_{m-2},$$

$$\varrho_{i+1} = \varrho_i' + \widehat{m-1}_i a_i\varrho'.$$

Daraus folgt, daß auch $\delta_{m-1}^{(i)} + \widehat{m-1}_i a_i\delta_{m-1}$ keinen Nenner hat, das Gleiche gilt dann von selbst für $\varrho_i' + \widehat{m-1}_i a_i\varrho'$. Die entwickelten Relationen reichen aus, um die Koeffizienten $\delta_k^{(i)}$, also die Elemente der

Determinante für ψw, als bilineare Funktionen der a und b auszudrücken, während ϱ_i in Bezug auf a auf die zweite Dimension steigt.

70.

Man kann indessen noch einen anderen Weg zur Bestimmung der $\delta_k^{(i)}$ einschlagen, wenn man die sukzessiven Produkte bildet:

$$y^l w = \delta_l \eta_{m-1} + \delta_{l+1} \eta_{m-2} \cdots + \delta_{l+m-2} \eta_1 - \varrho^{(l)} ,$$

wo die Hilfsgrößen $\delta_m \delta_{m+1} \delta_{m+2} \cdots$ für $l > 1$ durch die Gleichungen gegeben sind:

$$0 = a_0 \delta_{l+m-2} + \widehat{m}_1 a_1 \delta_{l+m-3} + \widehat{m}_2 a_2 \delta_{l+m-4} \cdots + \\ + \widehat{m}_1 a_{m-1} \delta_{l-1} + a_m \delta_{l-2} ,$$

während

$$\varrho^{(l)} = a_1 \delta_{l+m-2} + \widehat{m-1}_1 a_2 \delta_{l+m-3} \cdots + \widehat{m-1}_1 a_{m-1} \delta_l + a_m \delta_{l-1} .$$

Summiert man dann

$$w\eta_i = \widehat{m-1}_{i-1} a_i w + \mathop{\mathrm{S}}_{l=1}^{i} \widehat{m}_{i-l} a_{i-l} y^l w =$$

$$= \widehat{m-1}_{i-1} a_i (\delta_0 \eta_{m-1} \cdots + \delta_{m-2} \eta_1) +$$

$$+ \mathop{\mathrm{S}}_{l=1}^{i} \widehat{m}_{i-l} a_{i-l} \{ \delta_l \eta_{m-1} \cdots + \delta_{l+m-2} \eta_1 - \varrho^{(l)} \} ,$$

so ergeben sich die Koeffizientengleichungen

$$\delta_0^{(i)} = a_0 \delta_i + \widehat{m}_1 a_1 \delta_{i-1} \cdots + \widehat{m}_{i-1} a_{i-1} \delta_1 + \widehat{m-1}_{i-1} a_i \delta_0 ,$$

$$\delta_1^{(i)} = a_0 \delta_{i+1} + \widehat{m}_1 a_1 \delta_i \cdots + \widehat{m}_{i-1} a_{i-1} \delta_2 + \widehat{m-1}_{i-1} a_i \delta_1 ,$$

$$\cdots$$

$$\delta_{m-2}^{(i)} = a_0 \delta_{i+m-2} + \cdots + \widehat{m}_{i-1} a_{i-1} \delta_{m-1} + \widehat{m-1}_{i-1} a_i \delta_{m-2} ,$$

nebst

$$\varrho_i = a_0 \varrho^{(i)} + \widehat{m}_1 a_1 \varrho^{(i-1)} \cdots + \widehat{m}_{i-1} a_{i-1} \varrho' .$$

Für $i + k > m - 1$ lassen sich die Werte von $\delta_k^{(i)}$ durch Elimination der Hilfsgrößen $\delta_{m-1} \delta_m \delta_{m+1} \cdots$ vereinfachen. Man erhält leicht

$$\delta_{m-i}^{(i)} = - \widehat{m-1}_i a_i \delta_{m-i} - \widehat{m}_{i+1} a_{i+1} \delta_{m-i-1} \cdots - \widehat{m}_1 a_{m-1} \delta_1 - a_m \delta_0 ,$$

$$\delta_{m-i+1}^{(i)} = - \widehat{m-1}_i a_i \delta_{m-i+1} - \widehat{m}_{i+1} a_{i+1} \delta_{m-i} \cdots - \widehat{m}_1 a_{m-1} \delta_2 - a_m \delta_1 ,$$

$$\cdots$$

$$\delta_{m-2}^{(i)} = - \widehat{m-1}_i a_i \delta_{m-2} - \widehat{m}_{i+1} a_{i+1} \delta_{m-3} \cdots - \widehat{m}_1 a_{m-1} \delta_{i-1} - a_m \delta_{i-2} .$$

Hier bleiben die in der Diagonale stehenden Elemente $\delta_{m-i-1}^{(i)}$ wie die ϱ_i bei der Elimination von δ_{m-1} ohne Nenner, so daß auch für $c_0 = 1$ die Koeffizienten c_k in ψw *ganze* Funktionen von a und b werden.

71.

Wir wollen jetzt noch die Ausdrücke für die Potenzen von w untersuchen und schreiben

$$w^i = \varepsilon_0^{(i)}\eta_{m-1} + \varepsilon_1^{(i)}\eta_{m-2}\cdots + \varepsilon_{m-2}^{(i)}\eta_1 + \frac{1}{m}\sigma_i .$$

Dann ergibt die Multiplikation durch w:

$$\varepsilon_0^{(i+1)} = \delta_0^{(m-1)}\varepsilon_0^{(i)} + \delta_0^{(m-2)}\varepsilon_1^{(i)}\cdots + \delta_0'\varepsilon_{m-2}^{(i)} ,$$

$$\varepsilon_1^{(i+1)} = \delta_1^{(m-1)}\varepsilon_0^{(i)} + \delta_1^{(m-2)}\varepsilon_1^{(i)}\cdots + \delta_1'\varepsilon_{m-2}^{(i)} ,$$

$$\cdots$$

$$\varepsilon_{m-2}^{(i+1)} = \delta_{m-2}^{(m-1)}\varepsilon_0^{(i)} + \delta_{m-2}^{(m-2)}\varepsilon_1^{(i)}\cdots + \delta_{m-2}'\varepsilon_{m-2}^{(i)} ,$$

$$-\frac{1}{m}\sigma_{i+1} = \varrho_1\varepsilon_{m-2}^{(i)} + \varrho_2\varepsilon_{m-3}^{(i)}\cdots + \varrho_{m-1}\varepsilon_0^{(i)} .$$

Als Beispiel berechnen wir für $m = 5$, $i = 1$ den Wert von σ_2. Man hat

$$-\frac{1}{5}\sigma_2 = \varrho_1\varepsilon_3' + \varrho_2\varepsilon_2' + \varrho_3\varepsilon_1' + \varrho_4\varepsilon_0' = b_0\varrho_4 - b_1\varrho_3 + b_2\varrho_2 - b_3\varrho_1 ,$$

$$\varrho_1 = a_0\varrho' , \qquad \varrho_2 = a_0\varrho'' + 5a_1\varrho' ,$$

$$\varrho_3 = a_0\varrho''' + 5a_1\varrho'' + 10\,a_2\varrho' ,$$

$$\varrho_4 = a_0\varrho^{\mathrm{IV}} + 5a_1\varrho''' + 10\,a_2\varrho'' + 10\,a_3\varrho' ,$$

$$\varrho' = a_1\delta_4 + 4a_2\delta_3 + 6a_3\delta_2 + 4a_4\delta_1 + a_5\delta_0 ,$$

$$\varrho'' = a_1\delta_5 + 4a_2\delta_4 + 6a_3\delta_3 + 4a_4\delta_2 + a_5\delta_1 ,$$

$$\varrho''' = a_1\delta_6 + 4a_2\delta_5 + 6a_3\delta_4 + 4a_4\delta_3 + a_5\delta_2 ,$$

$$\varrho^{\mathrm{IV}} = a_1\delta_7 + 4a_2\delta_6 + 6a_3\delta_5 + 4a_4\delta_4 + a_5\delta_3 ,$$

und wenn man die Koeffizienten δ_i eliminiert:

$$\varrho_1 = b_0(03) - 4b_1(13) + 6b_2(23) - 4b_3(33) ,$$

$$\varrho_2 = 4b_0(02) - b_1(12) + 4b_2(22) - 6b_3(23) ,$$

$$\varrho_3 = 6b_0(01) - 4b_1(11) + b_2(12) - 4b_3(13) ,$$

$$\varrho_4 = 4b_0(00) - 6b_1(01) + 4b_2(02) - b_3(03) .$$

Damit geht der gesuchte Wert hervor:

$$-\frac{1}{5}\sigma_2 = 4c_2 = 4(00)b_0^2 - 12(01)b_0b_1 + 8(02)b_0b_2 - 2(03)b_0b_3 +$$
$$+ 4(11)b_1^2 - 2(12)b_1b_2 + 8(13)b_1b_3 + 4(22)b_2^2 - 12(23)b_2b_3 + 4(33)b_3^2 ,$$

wo zur Abkürzung geschrieben ist:

$$(00) = a_3 a_5 - a_4^2\,, \qquad (01) = a_2 a_5 - a_3 a_4\,,$$

$$(02) = a_1 a_5 - a_2 a_4\,, \qquad (03) = a_0 a_5 - a_1 a_4\,,$$

$$(11) = a_1 a_5 + 5 a_2 a_4 - 6 a_3^2\,, \qquad (12) = a_0 a_5 + 15 a_1 a_4 - 16 a_2 a_3\,,$$

$$(13) = a_0 a_4 - a_1 a_3\,, \qquad (22) = a_0 a_4 + 5 a_1 a_3 - 6 a_2^2\,,$$

$$(23) = a_0 a_3 - a_1 a_2\,, \qquad (33) = a_0 a_2 - a_1^2\,.$$

Für

$$a_0 = b_0 = A\,, \quad a_1 = b_1 = B\,, \quad a_2 = b_2 = C\,,$$

$$a_3 = b_3 = D\,, \quad a_4 = E\,, \quad a_5 = F$$

oder

$$g = f_{\prime\prime}$$

erhält man

$$2c_2 = A^2DF - 2A^2E^2 - 3ABCF + 11ABDE - 2AC^2E - 4ACD^2 + \\ + 2B^2F - 5B^2CE - 18B^2D^2 + 32BC^2D - 12C^4\,.$$

Immerhin ist die direkte Berechnung von $\psi(w)$ resp. den Koeffizienten c_i schon für kleine Werte von m recht weitläufig, wie man auch bei Cayley (*Crelle's Journal* Bd. 58, S. 259–69 und *Philosoph. Transact.* 1861, S. 561–78) nachsehen kann.

Im Art. 55 des IV. Kapitels ist für die Cayley'sche Funktion $w = \varphi(\overset{4}{x})$ die zugehörige Gleichung

$$\psi w = w^5 + 5Gw^4 + 10c_2 w^3 + 10c_3 w^2 + 5c_4 w + c_5$$

untersucht. Um die Hermite'sche Form herbeizuführen, ist das Glied $5Gw^4$ zu entfernen. Dies geschieht durch die bemerkenswerte Substitution:

$$\omega = \frac{1}{2}(w + G) = b_0\eta_4 - b_1\eta_3 + b_2\eta_2 - b_3\eta_1 = Af_{\prime} - 5g_{\mathrm{IV}} + 2G\ ^{1)}$$

$$= A(Ax^4 + 5Bx^3 + 10Cx^2 + 10Dx + 4E) - \\ - B(Ax^3 + 5Bx^2 + 10Cx + 6D) + \\ + C(Ax^2 + 5Bx + 4C) - D(Ax + B)\,,$$

welche der Gleichung entspricht

$$\omega^5 + 10\gamma_2\omega^3 + 10\gamma_3\omega^2 + 5\gamma_4\omega + \gamma_5 = 0\,.$$

Der Koeffizient $2\gamma_2$ erhält dann den oben angeführten Wert von $2c_2$.

1) Siehe S. 119: $g = A_1x^6 + 6B_1x^5 + 15C_1x^4 + \cdots$, $g_{\mathrm{IV}} = A_1x^2 + 2B_1x + C_1$.

72.

Will man sich zur Entwickelung von ψw der sukzessiven Elimination bedienen, so kann man dabei von verschiedenen Ausdrücken ausgehen. Die Gleichungen

$$w^i = \varepsilon_0^{(i)}\eta_{m-1} + \varepsilon_1^{(i)}\eta_{m-2}\cdots + \varepsilon_{m-2}^{(i)}\eta_1 + \varepsilon_{m-1}^{(i)}$$

für $i = 1, 2, \ldots l$ ergeben nach Elimination von $\eta_{m-1}\eta_{m-2}\cdots\eta_{m-l+1}$ oder $y^{m-1}y^{m-2}\ldots y^{m-l+1}$:

$$cw^l + c'w^{l-1} + c''w^{l-2}\cdots + c^{(l-1)}w = \varepsilon\eta_{m-l} + \varepsilon'\eta_{m-l-1}\cdots +$$
$$+ \varepsilon^{(m-l+1)}\eta_1 + \varepsilon^{(m-l)} = \gamma y^{m-l} + \gamma' y^{m-l-1}\ldots + \gamma^{(m-l-1)}y + \gamma^{(m-l)}.$$

Jede solche Gleichung kann zur Elimination von y aus $fy = 0$ verwandt werden und enthält m *willkürliche* Koeffizienten c und γ, weil nur die gegenseitigen Verhältnisse derselben in Betracht kommen. Das Gleiche gilt für Ausdrücke von der Form

$$(ay^l + a'y^{l-1}\cdots + a^{(l)})w = \alpha y^{m-l-1} + \alpha' y^{m-l-2}\ldots + \alpha^{(m-l-1)}$$

oder

$$(b\eta_l + b'\eta_{l-1}\cdots + b^{(l)})w = \beta\eta_{m-l-1} + \beta'\eta_{m-l-2}\cdots + \beta^{(m-l-1)},$$

wo wiederum die Größen $a\alpha$ oder $b\beta$ die Stelle von m willkürlichen Konstanten vertreten. Für besondere Zwecke können noch andere Formen vorteilhaft sein, wie Gordan und Kiepert für $m = 5$ bei der Reduktion auf die Brioschi'sche Resolvente gezeigt haben.

Vermöge der gegenseitigen Zusammengehörigkeit der Wurzeln x_k und w_k der Gleichungen $fy = 0$ und $\psi w = 0$ hat man nicht allein $w = \varphi(\overset{m-1}{y})$, sondern auch $y = \Phi(\overset{m-1}{w})$, so daß durch Elimination von y aus $f = 0$ und $w = \varphi$ die Gleichung $\psi = 0$, und durch Elimination von w aus $\psi = 0$ und $y = \Phi$ die Gleichung $f = 0$ erhalten wird. Zugleich erhellt, daß für

$$\psi = c_0 w^m + \widehat{m}_1 c_1 w^{m-1} + \widehat{m}_2 c_2 w^{m-2}\ldots + c_m$$

und

$$\zeta_i(w) = c_0 w^i + \widehat{m}_1 c_1 w^{i-1}\cdots + \widehat{m}_{i-1}c_{i-1}w + \widehat{m-1}_{i-1}c_i,$$

$$\Phi = b_0'\zeta_{m-1} - b_1'\zeta_{m-2} + (-1)^m b_{m-2}'\zeta_1 - \frac{a_1}{a_0}$$

gesetzt werden kann. Dann wird

$$\mathrm{S}\,\Phi(w_k) = \mathrm{S}\,x_k = -m\frac{a_1}{a_0} = b_0'\,\mathrm{S}\,\zeta_{m-1}(w_k) - b_1'\,\mathrm{S}\,\zeta_{m-2}(w_k) \pm\cdots - m\frac{a_1}{a_0},$$

wo

$$\mathrm{S}\,\zeta_i(w_k) = c_0\sigma_i + \widehat{m}_1 c_1\sigma_{i-1}\cdots + \widehat{m}_{i-1}c_{i-1}\sigma_1 + \widehat{m-1}_{i-1}c_i\sigma_0.$$

Die Gleichungen für $w = \varphi(y)$ und $y = \Phi(w)$ aber nehmen die Formen an:

$$\zeta_1 = b_0\eta_{m-1} - b_1\eta_{m-2} \cdots + (-1)^m b_{m-2}\eta_1 ,$$

$$\eta_1 = b_0'\zeta_{m-1} - b_1'\zeta_{m-2} \cdots + (-1)^m b_{m-2}'\zeta_1 ,$$

weil $\underset{k}{\mathrm{S}}\,\eta_i(x_k)$ und $\underset{k}{\mathrm{S}}\,\zeta_i(w_k)$ gleichzeitig verschwinden.

73.

Wir wollen nun nicht allein $c_0 = 1$, $c_1 = 0$, also $\zeta_1 = w$, sondern auch $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ oder $\eta_1 = y$ annehmen, so daß $\mathrm{S}\,w_k = \sigma_1$ und $\mathrm{S}\,x_k = s_1$ gleichzeitig verschwinden. Überhaupt werden wir uns für fy auf die Hermite'sche *kanonische* Form beschränken und schreiben:

$$fy = y^5 + Cy^3 + Ey + F ,$$

nebst

$$s_0 = 5 , \quad s_1 = 0 , \quad s_2 = -2C , \quad s_3 = 0 , \quad s_4 = 2(C^2 - 2E) ,$$

$$s_5 = -5F , \quad s_6 = -2C(C^2 - 3E) , \quad s_7 = 7CF ,$$

$$s_8 = 2(C^4 - 4C^2E + 2E^2) , \quad s_9 = -9(C^2 - E)F ,$$

$$s_{10} = -2C^5 + 10C^3E - 10CE^2 + 5F^2 , \quad s_{11} = 11(C^3 - 2CE)F ,$$

$$s_{12} = 2(C^6 - 6C^4E + 9C^2E^2 - 2E^3 - 6CF^2) .$$

Ferner sei

$$w = ay^4 + by^3 + cy^2 + dy + e = b_0\eta_4 - b_1\eta_3 + b_2\eta_2 - b_3\eta_1 ,$$

$$a = b_0 , \quad b = -b_1 , \quad c = Cb_0 + b_2 , \quad d = -(Eb_1 + b_3) ,$$

$$e = \frac{2}{5}(2Eb_0 + Cb_2) ;$$

wir fragen, wann auch ψw die kanonische Form annimmt. Zunächst wird

$$\sigma_1 = as_4 + bs_3 + cs_2 + ds_1 + es_0 = as_4 + cs_2 + 5e = 0 ,$$

und wenn man zu w^2 übergeht:

$$\sigma_2 = a^2s_8 + 2abs_7 + (2ac + b^2)s_6 + 2(ad + bc)s_5 + \\ + (2ae + 2bd + c^2)s_4 + (2ce + d^2)s_2 + 5e^2 ,$$

$$\frac{1}{2}\sigma_2 = \frac{2}{5}E^2b_0^2 + 3CFb_0b_1 + \frac{2}{5}CEb_0b_2 + 5Fb_0b_3 - 6Eb_1^2 - \\ - 5Fb_1b_2 - 4Eb_1b_3 + \frac{3}{5}C^2b_2^2 - 2Eb_2^2 - Cb_3^2 .$$

Durch Kubierung des Ausdrucks für w ergibt sich:

$$\begin{aligned}\sigma_3 = a^3 s_{12} &+ 3a^2 b s_{11} + 3(a^2c + ab^2)s_{10} + (3a^2d + 6abc + b^3)s_9 + \\ &+ 3(a^2e + 2abd + ac^2 + b^2c)s_8 + 3(2abe + 2acd + b^2d + bc^2)s_7 + \\ &\quad + (6ace + 3ad^2 + 3b^2e + 6bcd + c^3)s_6 + \\ &\quad + 3(2ade + 2bce + bd^2 + c^2d)s_5 + \\ &\quad + 3(ae^2 + 2bde + c^2e + cd^2)s_4 + 3(ce^2 + d^2e)s_3 + 5e^3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\sigma_3 = (CF^2 + \tfrac{4}{25}E^3)b_0^3 &- \tfrac{1}{5}CEFb_0^2b_1 + (\tfrac{6}{25}CE^2 + 5F^2)b_0^2b_2 - EFb_0^2b_3 + \\ &+ (\tfrac{2}{5}CE^2 + 5F^2)b_0b_1^2 + (\tfrac{12}{5}C^2F - 10EF)\,b_0b_1b_2 + \tfrac{8}{5}E^2b_0b_1b_3 - \\ &- (\tfrac{2}{25}CE^2 - \tfrac{4}{5}E^2)\,b_0b_2^2 + \tfrac{2}{5}CE\,b_0b_3^2 + (C^2F - 3EF)b_1^3 - \\ &- (\tfrac{4}{5}C^2E - 4E^2)\,b_1^2b_2 + 3CFb_1^2b_3 + 2CFb_1b_2^2 + \tfrac{4}{5}CE\,b_1b_2b_3 + \\ &+ 5Fb_1b_3^2 - (\tfrac{2}{25}C^3 - \tfrac{2}{5}CE)b_2^3 + 5Fb_2^2b_3 + (\tfrac{6}{5}C^2 - 4E)\,b_2b_3^2.\end{aligned}$$

Dieser Wert muß verschwinden, wenn ψw die kanonische Form haben soll. Selbstverständlich wird $\sigma_3 = 0$ für $b_0 = b_1 = b_2 = 0$, weil alsdann $w = -b_3\eta_1$ eine identische Transformation darstellt.

Um die gefundenen Ausdrücke homogen zu machen, führen wir jetzt die Formen ein:

$$fy = Ay^5 + 10Cy^3 + 5Ey + F,$$

$$\psi w = w^5 + 10c_2w^3 + 10c_3w^2 + 5c_4w + c_5,$$

wodurch

$$10c_2 = -\frac{1}{2}\sigma_2, \qquad 10c_3 = -\frac{1}{3}\sigma_3, \qquad 5c_4 = -\frac{1}{4}(\sigma_4 - \frac{1}{2}\sigma_2^2),$$

$$c_5 = -\frac{1}{5}(\sigma_5 - \frac{5}{6}\sigma_2\sigma_3).$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned}2c_2 = &- 2E^2b_0^2 - 6CFb_0b_1 - 4CEb_0b_2 - AFb_0b_3 + 10CEb_1^2 - \\ &- AFb_1b_2 + 4AEb_1b_3 + 2(AE - 6C^2)b_2^2 + 2ACb_3^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2c_3 = &- 2(CF^2 + 2E^3)b_0^3 + 2CEFb_0^2b_1 - (AF^2 + 12CE^2)b_0^2b_2 + \\ &+ AEFb_0^2b_3 - (AF^2 + 20CE^2)b_0b_1^2 + 2(5AE - 24C^2)Fb_0b_1b_2 - \\ &- 8AE^2b_0b_1b_3 - 4(AE - 2C^2)Eb_0b_2^2 - 4ACEb_0b_3^2 + \\ &+ (3AE - 20C^2)Fb_1^3 - 20(AE - 4C^2)Eb_1^2b_2 - 6ACFb_1^2b_3 - \\ &- 4ACFb_1b_2^2 - 8ACEb_1b_2b_3 - A^2Fb_1b_3^2 - 4(AE - 4C^2)Cb_2^3 - \\ &- A^2Fb_2^2b_3 + 4(AE - 6C^2)Ab_2b_3^2.\end{aligned}$$

74.

Nach dem Früheren sind die berechneten Werte simultane Invarianten der beiden Funktionen

$$fy = Ay^5 + 10Cy^3 + 5Ey + F \quad \text{und} \quad gy = b_0y^3 + 3b_1y^2 + 3b_2y + b_3 \,,$$

und zwar enthält c_2 kein in $b_2 b_3$ und c_3 kein in b_3^2 multipliziertes Glied. Mithin reicht die Auflösung *einer quadratischen* Gleichung aus, um c_2 oder c_3 zum Verschwinden zu bringen. Indessen kann das Gleiche auch auf rationalem Wege erreicht werden, denn c_2 verschwindet, wenn

$$Cb_3 = \left(\frac{1}{4}F + \sqrt{\frac{C\delta}{A\alpha}}\right)b_0 - Eb_1$$

und

$$(6C^2 - AE)b_2 = -\left(CE + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}\right)b_0 - \left(\frac{1}{4}AF + \sqrt{\alpha}\right)b_1 \,,$$

oder

$$Cb_3 = \frac{1}{4}Fb_0 - \left(E + \sqrt{\frac{C\delta}{A\gamma}}\right)b_1$$

und

$$(6C^2 - AE)b_2 = -\left(CE + \sqrt{\gamma}\right)b_0 - \left(\frac{1}{4}AF + \frac{\beta}{\sqrt{\gamma}}\right)b_1$$

gesetzt werden, während zur Abkürzung

$$\alpha = \frac{A^2E^3}{C} + \frac{1}{16}A^2F^2 - 11ACE^2 + 30C^3E \,,$$

$$\beta = -\frac{A^2E^2F}{4C} + \frac{13}{4}ACEF - 4C^3F \,,$$

$$\gamma = \frac{A^2EF^2}{16C} - \frac{3}{8}ACF^2 + AE^3 - 5C^2E^2 \,,$$

$$\delta = \frac{A^3F^4}{256C} + \frac{A^2E^5}{C} + \frac{5}{8}A^2E^2F^2 - \frac{45}{8}AC^2EF^2 - $$
$$- 10ACE^4 + \frac{27}{2}C^4F^2 + 25C^3E^3 \,,$$

$$\beta^2 = \alpha\gamma + (6C^2 - AE)\delta$$

geschrieben sind.[1])

---

1) Vermöge einer bekannten Eigenschaft der quadratischen Formen hat man

$$c_2 = \frac{A}{C}\left\{\left[\tfrac{1}{4}Fb_0 - Eb_1 - Cb_3\right]^2 - \frac{C\delta}{A\gamma}b_1^2\right\} -$$
$$- \frac{1}{6C^2 - AE}\left\{\left[CEb_0 + \tfrac{1}{4}AFb_1 + (6C^2 - AE)b_2\right]^2 - \left[b_0\sqrt{\gamma} + b_1\frac{\beta}{\sqrt{\gamma}}\right]^2\right\} \,,$$
$$= \frac{A}{C}\left\{\left[\tfrac{1}{4}Fb_0 - Eb_1 - Cb_3\right]^2 - \frac{C\delta}{A\alpha}b_0^2\right\} -$$
$$- \frac{1}{6C^2 - AE}\left\{\left[CEb_0 + \tfrac{1}{4}AFb_1 + (6C^2 - AE)b_2\right]^2 - \left[b_0\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} + b_1\sqrt{\alpha}\right]^2\right\} \,.$$

In analoger Weise kann man die in Bezug auf b_3 quadratische Gleichung $c_3 = 0$ durch *zwei* rationale Bedingungsgleichungen ersetzen, indem man die Form herbeiführt:

$$c_3 = B_1 b_3^2 - B_2 b_3 + B_3 .$$

Hier bedeuten $B_1 B_2 B_3$ Formen erster, zweiter und dritter Dimension von $b_0 b_1 b_2$, und c_3 verschwindet, wenn man $B_1 = 0$ und $b_3 = \frac{B_3}{B_2}$ setzt, also z. B. neben b_3 auch b_2 mittelst B_1 eliminiert. Nach der gebräuchlichen Terminologie führt die Bedingung $c_2 = 0$ auf eine sogenannte *Hauptgleichung* fünften Grades

$$w^5 + 10 c_3 w^2 + 5 c_4 w + c_5 = 0 ,$$

während die Gleichung $c_3 = 0$ die *kanonische* Form liefert:

$$w^5 + 10 c_2 w^3 + 5 c_4 w + c_5 = 0 .$$

Es ist dabei zu bemerken einerseits, daß bei der Herstellung der *Hauptgleichung* die in den beiden linearen Gleichungen vorkommenden Radikale nicht als Irrationalitäten bezeichnet worden sind, weil sie von den Transformationskoeffizienten b unabhängig sind, während andererseits die ursprüngliche Ableitung der kanonischen Form Hermite's bereits die Wurzel $\sqrt{D_5}$ aus der Diskriminante eingeführt hat.

Selbstverständlich kann man auch einen Ausdruck vierter Dimension, wie c_4 oder $\gamma_4 = \alpha c_4 - \beta c_2^2 = \alpha' \sigma_4 - \beta' \sigma_2^2$, durch Auflösung einer Gleichung vierten Grades zum Verschwinden bringen. Komplizierter ist die Aufstellung der notwendigen Bedingungen, wenn *zwei* Gleichungen $c_2 = c_3 = 0$, oder $c_2 = c_4 = 0$, oder $c_3 = \gamma_4 = 0$ gleichzeitig erfüllt werden sollen. Will man c_2 und c_3 zugleich verschwinden lassen, so kann man allerdings mittelst der beiden *linearen* Bedingungen, welche b_2 und b_3 durch b_0 und b_1 ausdrücken, b_0 und b_1 aus c_3 eliminieren, aber dann würden in b_3^3 multiplizierte Glieder erscheinen, so daß statt der quadratischen Gleichung eine kubische Gleichung auftritt, wie schon Bring-Jerrard bemerkt haben. Die Einführung von $c_3 = 0$ in c_2 würde im Allgemeinen sogar einen Ausdruck sechsten Grades zur Folge haben, wie bei der Gleichung $c_2^3 + c_3^2 = 0$. Die Gleichungen $c_2 = c_4 = 0$ erfordern analog die Auflösung einer Gleichung vierten Grades, während die Bedingungen $c_3 = c_4 = 0$ nebst der Gleichung $w^5 + 10 c_2 w^3 + c_5 = 0$ sich auf den vorigen Fall zurückführen lassen, da für

$$w = \frac{1}{\omega} , \quad \gamma_3 = \frac{c_2}{c_5} , \quad \gamma_5 = \frac{1}{c_5} , \quad \omega^5 + 10 \gamma_3 \omega^2 + \gamma_5 = 0$$

erhalten wird. Die Bedingungen $c_3 = \gamma_4 = 0$ steigen im Allgemeinen wegen $c_3^2 + \gamma_4^2 = 0$ mindestens auf den achten Grad, so daß eine weitere Graderniedrigung nur unter besonderen Verhältnissen eintreten kann.

75.

Da mittelst der elementaren Operationen der Radizierung die Gleichung

$$w^5 + 5c_4 w + c_5 = 0$$

herstellbar ist, und nur die *Verhältnisse* der Koeffizienten der Tschirnhaus-Transformation bestimmt sind, so kann man b_0 so wählen, daß die Eisenstein'sche Gleichung $\chi^5 + \chi = \lambda$ hervorgeht, wodurch die Wurzel χ Funktion eines einzigen Arguments wird. Schreibt man in der kanonischen Form

$$c_2 = b\,, \qquad c_4 = 9b^2 - 4ac\,, \qquad c_5 = 8\Delta\,,$$

$$\Delta^2 = 16a^5c^2 - 40a^4b^2c + 25a^3b^4 - 20a^2bc^2 + 45ab^3c - 27b^5 + c^3\,,$$

so folgt die Gleichung

$$w^5 + 10bw^3 + 5(9b^2 - 4ac)w = \pm 8\Delta\,,$$

von der Brioschi gezeigt hat, daß auf Grund der Galois-Hermite'schen Untersuchungen die sogenannte *allgemeine* Jacobi'sche Gleichung 6-ten Grades in der Kronecker'schen Form

$$(z^2 - a)^6 - 4a(z^2 - a)^5 + 10b(z^2 - a)^3 - 4c(z^2 - a) + 5b^2 - 4ac = 0$$

auf jene Gleichung fünften Grades zurückgeführt werden kann. Die Bedingung $b = 0$ ergibt dann die Jerrard'sche *Normalform mit einem wesentlichen Parameter,* welche namentlich von Hermite zur Wurzeldarstellung mittelst elliptischer Modulfunktionen benutzt worden ist. Doch läßt sich eine solche Darstellung, wie Kronecker's Untersuchungen gelehrt haben, auch bei anderen Formen herbeiführen.

Für

$$a = 0 \quad \text{oder} \quad c = 0\,, \quad \text{d. h.} \quad \gamma_4 = c_4 - 9c_2^2 = 20\sigma_4 - \sigma_2^2 = 0\,,$$

erhält man die zuerst wohl von Gordan so genannte Brioschi'sche Resolvente (*Math. Annalen,* Bd. 13, S. 399)

$$y^5 + 10by^3 + 45b^2y = 8\sqrt{c^3 - 27b^5} \qquad \text{resp.} \qquad = 8\sqrt{25a^3b^4 - 27b^5}\,,$$

gleichfalls mit nur *einem* wesentlichen Parameter, während Klein (*Ikosaeder* S. 151, vgl. auch S. 105) das Verdienst, zuerst auf den Fall $a = 0$ seine Aufmerksamkeit gerichtet zu haben, für Kronecker in Anspruch nimmt. Kiepert und Gordan haben gezeigt, wie sich die Brioschi'sche

Form auf elementarem Wege ergibt, und zwar benutzt ersterer eine Substitution, welche für $B = D = 0$ die Form annimmt:

$$b_2\eta_2 - b_3\eta_1 = \frac{cw + c'}{w^2 + 1}, \qquad ACb_3^2 = (6C^2 - AE)b_2^2,$$

wo c und c' gleichfalls von der Aufstellung quadratischer Gleichungen abhängen. Die Lösung erfolgt dann wie bei der Jerrard'schen Normalform durch Modulfunktionen.[1])

Nicht minder kann man für $9b^2 = 4ac$, wie bereits bemerkt, die Normalform $w^5 + 10c_2w^3 + c_5 = 0$ elementar herleiten. Dagegen ist eine derartige Herleitung durch Radizierung nicht mehr möglich, sobald die Gleichung für w elementar lösbar wird. So folgt z. B. für

$$5b^2 = 4ac \quad \text{oder} \quad \gamma_4 = c_4 - 4c_2^2 = 10\sigma_4 - 3\sigma_2^2 = 0:$$

$$w^5 + 10c_2w^3 + 20c_2^2w + c_5 = 0,$$

und hier wird für

$$c_2 = -\frac{1}{2}, \qquad c_5 = -2\sin 5u, \qquad w = 2\sin u.$$

76.

Zur Berechnung von σ_4 oder c_4 kann man folgenden Weg einschlagen. Schreiben wir

$$w^2 = a'y^4 + b'y^3 + c'y^2 + d'y + e',$$

so folgt neben

$$0 = 2(C^2 - 2E)a - 2Cc + 5e,$$

$$\sigma_2 = 2(C^2 - 2E)a' - 2Cc' + 5e'.$$

Um die Koeffizienten zu bestimmen, gehen wir aus von der Gleichung

$$w^2 = (ay^4 + by^3 + cy^2 + dy + e)^2 =$$

$$= (a^2y^3 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma)(y^5 + Cy^3 + Ey + F) + a'y^4 + b'y^3 + c'y^2 + d'y + e',$$

und erhalten:

$$\alpha = 2ab, \qquad \beta = -Ca^2 + 2ac + b^2, \qquad \gamma = -2Cab + 2ad + 2bc,$$

$$a' = (C^2 - E)a^2 - 2Cac + 2ae - Cb^2 + 2bd + c^2,$$

$$b' = -Fa^2 + 2(C^2 - E)ab - 2C(ad + bc) + 2(be + cd),$$

1) Der Ableitung und Auflösung der Brioschi'schen Normalgleichung, resp. ihrer engen Beziehung zur Fünfteilung der elliptischen Funktionen, hat Halphen das erste der in Bd. III seines *Traité des fonctions elliptiques* enthaltenen posthumen Fragmente gewidmet.

$$c' = CEa^2 - 2Fab - 2Eac - Eb^2 + 2ce + d^2,$$

$$d' = CFa^2 + 2CEab - 2Fac - 2Ead - Fb^2 - 2Ebc + 2de,$$

$$e' = 2CFab - 2Fad - 2Fbc + e^2.$$

Damit ergibt sich

$$\sigma_2 = 2(C^4 - 4C^2E + 2E^2)a^2 + 14CFab - 2C(C^2 - 3E)(2ac + b^2) -$$
$$- 10F(ad + bc) + 2(C^2 - 2E)(2ae + 2bd + c^2) - 2C(2ce + d^2) + 5e^2,$$

wo bei Einführung von $b_0 b_1 b_2 b_3$ die Übereinstimmung mit dem früher abgeleiteten Werte von σ_2 erhellt. Vertauscht man aber $abcde$ mit $a'b'c'd'e'$, oder w mit w^2, so geht σ_2 in σ_4 über und man erhält:

$$\sigma_4 = 2(C^4 - 4C^2E + 2E^2)a'^2 + 13CFa'b' - 2C(C^2 - 3E)(2a'c' + b'^2) -$$
$$- 10F(a'd' + b'c') + 2(C^2 - 2E)(2a'e' + 2b'd' + c'^2) - 2C(2c'e' + d'^2) + 5e'^2,$$

während

$$\sigma_2^2 = 4(C^4 - 4C^2E + 4E^2)a'^2 - 8C(C^2 - 2E)a'c' + 20(C^2 - 2E)a'e' +$$
$$+ 4C^2c'^2 - 20Cc'e' + 25e'^2.$$

Hier hat man nun, um $c_4 = -\frac{1}{4}(\sigma_4 - \frac{1}{2}\sigma_2^2)$ zu berechnen, die Werte zu substituieren:

$$a' = \frac{3}{5}Eb_0^2 + \frac{4}{5}Cb_0b_2 + Cb_1^2 + 2b_1b_3 + b_2^2,$$

$$b' = -Fb_0^2 + \frac{2}{5}Eb_0b_1 - \frac{4}{5}Cb_1b_2 - 2b_1b_3,$$

$$c' = \frac{3}{5}Cb_0^2 + \frac{2}{5}Fb_0b_1 + \frac{2}{5}(2C^2 - E)b_0b_2 + (C^2 - E)b_1^2 +$$
$$+ 2Cb_1b_3 + \frac{4}{5}Cb_2^2 + b_3^2,$$

$$d' = -CFb_0^2 + \frac{2}{5}CEb_0b_1 - 2Fb_0b_2 + \frac{2}{5}Eb_0b_3 - Fb_1^2 -$$
$$-(\frac{4}{5}C^2 - 2E)b_1b_2 - \frac{4}{5}Cb_2b_3,$$

$$e' = \frac{16}{25}E^2b_0^2 + 2CFb_0b_1 + \frac{16}{25}CEb_0b_2 + 2Fb_0b_3 + 2Fb_1b_2 + \frac{4}{25}C^2b_2^2,$$

sowie durch Einführung von $a_0 = A$ die Ausdrücke homogen zu machen. Da die Rechnung ziemlich weitläufig ist, so mag hier wenigstens die Abhängigkeit von b_2 und b_3 untersucht werden. Wir setzen demnach

$$b_0 = b_1 = 0 \quad \text{oder} \quad w = b_2\eta_2 - b_3\eta_1 \qquad \text{und erhalten:}$$

$$a' = b_2^2, \quad b' = 0, \quad c' = \frac{4}{5}Cb_2^2 + b_3^2, \quad d' = -\frac{4}{5}Cb_2b_3, \quad e' = \frac{4}{25}C^2b_2^2$$

Alsdann wird

$$\sigma_4 = 2(C^2 - 2E)b_3^4 - \frac{4}{5}C\left(\frac{17}{5}C^2 - 2E\right)b_2^2 b_3^2 + 8CFb_2^3 b_3 +$$
$$+ 2\left(\frac{21}{125}C^4 - \frac{28}{25}C^2E + 2E^2\right)b_2^4,$$

$$\frac{1}{4}\sigma_2^2 = C^2 b_3^4 - \frac{2}{5}C(3C^2 - 10E)b_2^2 b_3^2 + \frac{1}{25}(3C^2 - 10E)^2 b_2^4,$$

$$c_2 = ACb_3^2 + (AE - 6C^2)b_2^2,$$

$$c_4 = A^3Eb_3^4 + 2AC(3AE + 8C^2)b_2^2 b_3^2 - 4A^2CFb_2^3 b_3 +$$
$$+ (AE - 2C^2)(5AE - 24C^2)b_2^4,$$

nebst

$$2c_3 = b_2\left\{4A(AE - 6C^2)b_3^2 - A^2Fb_2 b_3 - 4C(AE - 4C^2)b_2^2\right\}.$$

Letzterer Ausdruck verschwindet nicht allein für $b_2 = 0$ und $w = -Ab_3 y$, sondern auch wenn

$$b_2 : b_3 = \alpha\Delta + \alpha A^2F + 8\beta A(6C^2 - AE) : \beta\Delta - \beta A^2F + 8\alpha C(4C^2 - AE),$$

und zwar für *beliebige* Werte der Faktoren α und β, während

$$\Delta^2 = A^4F^2 + 64AC(4C^2 - AE)(6C^2 - EA).$$

77.

Zum Schlusse mögen noch einige Bemerkungen Platz finden über die Berechnung von ψw durch direkte Elimination von y aus den Gleichungen $fy = 0$ und $w = \varphi y$. Abgesehen von der Weitläufigkeit der Rechnung besteht die Schwierigkeit darin, zu bewirken, daß ψw nicht auf einen höheren Grad als den m-ten steige: man wird also in solchem Falle einen zu ermittelnden Faktor abzutrennen haben.

Sei

$$f = y^5 + Cy^3 + Ey + F = 0,$$

$$w = y^4 + by^3 + cy^2 + dy + e = \varphi_4$$
$$= y^4 - b_1 y^3 + (C + b_2)y^2 - (Cb_1 + b_3)y + \frac{2}{5}(2E + Cb_2),$$

so wird

$$f + (y + b_2)(w - \varphi_4) = b'y^3 + c'y^2 + d'y + e' = \varphi_3 = 0,$$

$$b' = b_1^2 - b_2, \qquad c' = -(b_1 b_2 - b_3),$$

$$d' = w' - \frac{2}{5}Cb_2 + b_1(Cb_1 + b_3),$$

$$e' = b_1(w' - E - \frac{2}{5}Cb_2) + F,$$

wo zur Abkürzung $w' = w + \frac{1}{5} E$ geschrieben ist. Ferner

$$b'^2(w - \varphi_4) + (b'y - b'b_1 - c')\varphi_3 = c''y^2 + d''y + e'' = \varphi_2 = 0\,,$$

$$c'' = -b'^2(C + b_2) - c'(b'b_1 + c') + b'd'$$
$$= (b_1^2 - b_2)\left(w' + \frac{3}{5} Cb_2\right) + 2b_1 b_2 b_3 - b_2^3 - b_3^2\,,$$

$$d'' = b'^2(Cb_1 + b_3) - d'(b'b_1 + c') + b'e'$$
$$= (b_1 b_2 - b_3)\left(w' + \frac{3}{5} Cb_2\right) + (b_1^2 - b_2)(F - Eb_1 - Cb_3) + (b_2^2 - b_1 b_3)b_3\,,$$

$$e'' = b'^2\left(w' - E - \frac{2}{5} Cb_2\right) - e'(b'b_1 + c')$$
$$= (b_2^2 - b_1 b_3)\left(w' - E - \frac{2}{5} Cb_2\right) - F(b_1^3 - 2b_1 b_2 + b_3)\,.$$

Um eine verschwindende lineare Funktion φ_1 abzuleiten, kann man drei verschiedene Ausdrücke bilden:

$$\varphi_1 = e_0 y + e_1 = c''^2\varphi_3 - (b'c''y - b'd'' + c'c'')\varphi_2\,,$$

oder

$$\varphi_1 = e_1 y + e_2 = \frac{1}{y}\left\{(b'e''y + e'c'')\varphi_2 - c''e''\varphi_3\right\},$$

oder endlich

$$\varphi_1 = e_2 y + e_3 = \frac{1}{y^2}\left\{e''^2\varphi_3 - [(d'e'' - e'd'')y + e'e'']\varphi_2\right\},$$

$$e_0 = b'(d''^2 - c''e'' - c'c''d'' + d'c''^2)\,,$$

$$e_1 = b'd''e'' - c'c''e'' + e'c''^2,$$

$$e_2 = b'e''^2 - d'c''e'' + e'c''d''\,,$$

$$e_3 = c'e''^2 - d'd''e'' + e'(d''^2 - c''e'')\,.$$

Da $d'e'c''d''e''$ in Bezug auf w oder w' linear sind, so steigen $e_0 e_1 e_2 e_3$ auf den dritten Grad, und zwar sind die Glieder höchster Dimension:

$$d' = w\ldots, \qquad e' = b_1 w\,, \qquad c'' = b'w\,,$$

$$d'' = (b_1 b_2 - b_3)w\,, \qquad e'' = (b_2^2 - b_1 b_3)w\,,$$

$$e_0 = b'^2 w^3\,, \qquad e_1 = b'^2 b_1 w^3\,,$$

$$e_2 = b'^2 b_2 w^3\,, \qquad e_3 = b'^2 b_3 w^3\,.$$

Daraus folgt, daß

$$e_1^2 - e_0 e_2 = b'^5 w^6 + b'' w^5 + \cdots$$
$$= (b'^5 w + b'')(w^5 + 10c_2 w^3 + 10c_3 w^2 + 5c_4 w + c_5)\,.$$

Entsprechende Ausdrücke kann man für $e_2^2 - e_1 e_3$ und $e_1 e_2 - e_0 e_3$ aufstellen, wenn auch die Berechnung der Koeffizienten einigermaßen beschwerlich bleibt. Deshalb ist es nicht unwichtig, in dem Umstande, daß für $b_i = (-x)^i$ w in die Wurzel z der typischen Gleichung, folglich $\psi w = 0$ in die letztere selbst übergeht, eine wirksame Kontrolle für die Rechnung zu besitzen. So muß für $b_i = (-x)^i$:

$$c_2 = f_2 = -g\,, \quad c_3 = -h\,, \quad c_4 = f^2 g_2 - 3g^2\,, \quad c_5 = f^2 g_5 - 2gh$$

werden, wie man leicht direkt verifiziert; für $x = x_k$ folgt identisch wegen

$$w = 4f_{\prime}(y)\,, \qquad g = f_{\prime}^2(y)\,, \qquad h = 2f_{\prime}^3(y)\,,$$

$$w^5 = 10gw^3 + 10hw^2 + 15g^2w + 2gh\,.$$

Anhang, Abschnitt III.

VII. Zur Auflösung der Ikosaedergleichung.

78.

Seit Kummer's Arbeiten über die hypergeometrische Reihe ist bekannt, daß das Verhältnis zweier Partikularlösungen $y_1 y_2$ der linearen Differentialgleichung mit der unabhängigen Variablen x

$$y'' + py' + qy = 0,$$

die Differentialgleichung dritter Ordnung

$$\frac{s'''}{s'} - \frac{3}{2}\left(\frac{s''}{s'}\right)^2 + p' + \frac{1}{2}p^2 - 2q = 0$$

erfüllt, deren vollständiges Integral durch

$$s = \frac{ay_1 + by_2}{a'y_1 + b'y_2}$$

gegeben ist. Für die Gauß'sche Funktion $F(\alpha\beta\gamma x)$ hat man

$$p = \frac{(\alpha+\beta+1)x - 1}{x(x-1)}, \qquad q = \frac{\alpha\beta}{x(x-1)},$$

folglich (*Crelle's Journal* Bd. 15, S. 46)

$$p' + \frac{1}{2}p^2 - 2q = \frac{Ax^2 + 2Bx + C}{2x^2(x-1)^2},$$

$$A = (\alpha-\beta)^2 - 1, \qquad B = 2\alpha\beta - (\alpha+\beta-1)\gamma, \qquad C = \gamma(\gamma-2),$$

wofür man mit Herrn Schwarz (das. Bd. 75, S. 301) auch schreiben kann:

$$\frac{\lambda^2 - 1}{2x^2} - \frac{\lambda^2 - \mu^2 + \nu^2 - 1}{2x(x-1)} + \frac{\nu^2 - 1}{2(x-1)^2},$$

$$\lambda^2 = (\gamma-1)^2, \qquad \mu^2 = (\alpha-\beta)^2, \qquad \nu^2 = (\gamma-\alpha-\beta)^2,$$

$\lambda\mu\nu$ sollen als reell und positiv vorausgesetzt werden.

Der Differentialausdruck

$$\{s, x\} = \frac{s'''}{s'} - \frac{3}{2}\left(\frac{s''}{s'}\right)^2 = \sigma'' - \frac{1}{2}\sigma'\sigma' \quad \text{für} \quad \sigma = \lg s'$$

hat seit der Preisschrift von Schwarz über Minimalflächen (1867) wiederholt Anwendung gefunden. Außer den Schwarz'schen Arbeiten mag hier nur noch die Schrift von Cayley: *On the Schwarzian Derivative and the Polyhedral Functions*, *Cambridge Phil. Soc. Trans.* XIII (1880) oder *Mathem. Papers* XI, Nr. 745 angeführt werden. Zur Vertauschung der Variabeln dient die Gleichung

$$\{s, x\}dx^2 + \{x, s\}ds^2 = 0,$$

allgemeiner

$$\{s, x\}dx^2 = (\{s, \xi\} - \{x, \xi\})d\xi^2,$$

also für die lineare Substitution

$$x = \frac{\delta\xi + \delta_1}{\delta_2\xi + \delta_3}: \qquad \{s, x\}dx^2 = \{s, \xi\}d\xi^2.$$

Betrachtet man hier s als Funktion von $\lambda\mu\nu x$ und führt statt x

$$\xi = \frac{1}{1-x} \quad \text{resp.} \quad \xi = \frac{x-1}{x}$$

ein, so geht $s(\lambda, \mu, \nu, x)$ über in

$$s\left(\mu, \nu, \lambda, \frac{1}{1-x}\right) \quad \text{resp.} \quad s\left(\nu, \lambda, \mu, \frac{x-1}{x}\right),$$

während, wenn x durch resp. $\xi = \frac{1}{x}$, $1-x$ und $\frac{x}{x-1}$ ersetzt wird die Werte

$$s\left(\mu, \lambda, \nu, \frac{1}{x}\right), \qquad s(\nu, \mu, \lambda, 1-x) \qquad \text{und} \qquad s\left(\lambda, \nu, \mu, \frac{x}{x-1}\right)$$

sich ergeben (Schwarz a. a. O. S. 302).

79.

Nun hat Herr Schwarz in seiner grundlegenden Abhandlung aus dem Jahre 1872 die Fälle untersucht, in denen $F(\alpha\beta\gamma x)$ eine *algebraische* Funktion von x darstellt (siehe auch *Werke* Bd. II, S. 211). Dabei handelt es sich wesentlich um die konforme Übertragung der Fläche s eines sphärischen Dreiecks mit den Winkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi$ und $\nu\pi$ auf eine Halbebene der Variablen x. Wenn speziell das sphärische Dreieck mit den Winkeln $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{2}$ konform abgebildet werden soll, in der Art, daß den Ecken desselben beziehlich die Werte $x = 0$, $x = \infty$ und $x = 1$ ent-

sprechen (a. a. O. S. 330), so wird dies für $s^5 = z$ herbeigeführt durch die Funktion

$$x = -\frac{z_4^3}{12^3 z z_2^5} \quad \text{oder} \quad x - 1 = -\frac{z_6^2}{12^3 z z_2^5},$$

wo

$$z_2 = z^2 + 11z - 1 \,,$$

$$z_4 = z^4 - 228z^3 + 494z^2 + 228z + 1 \,,$$

$$= (z^2 - a_1 z - 1)(z^2 - a_2 z - 1) \quad \text{nebst} \quad a^2 - 228a + 496 = 0 \,,$$

$$z_6 = z^6 + 522z^5 - 10005z^4 - 10005z^2 - 522z + 1 \,,$$

$$= (z^2 + 1)(z^2 + b_1 z - 1)(z^2 + b_2 z - 1) \quad \text{nebst} \quad b^2 - 522b - 10004 = 0 \,,$$

gesetzt ist und die einfache Differentialformel besteht:

$$x z_6 z' = z z_2 z_4 \,.$$

Für das Argument s bezeichnet z_4 und z_6 die beiden Kovarianten

$$144g \quad \text{und} \quad -864h \quad \text{der Funktion } f(s) = s z_2 \,,$$

wenn letztere vom Grade $m = 12$ angenommen, also der Koeffizient von s^{12} $a_0 = 0$ vorausgesetzt wird.

Schwarz schreibt

$$\varphi_{12}(s) = -s z_2 \,, \qquad \varphi_{20}(s) = z_4 \,, \qquad \varphi_{30}(s) = z_6 \,,$$

und zeigt[1]), daß „die konforme Abbildung der Kugeloberfläche s auf die Oberfläche eines regelmäßigen Ikosaeders vermittelt wird durch das Integral

$$u = \int \frac{ds}{\sqrt[6]{\varphi_{12}(s)}} = \frac{6}{5}\int \frac{dt}{\sqrt[6]{1 - 11t^6 - t^{12}}} \,, \qquad s^5 = t^6 \,,$$

welches durch eine passende algebraische Substitution in ein elliptisches Integral erster Art transformiert werden kann." In der Tat erhält man nicht allein

$$du = \frac{1}{5}\frac{dz}{z z_2}\sqrt[6]{-z z_2^5} \,,$$

sondern wegen

$$\frac{dz}{z z_2} = \frac{z_4}{z_6}\frac{dx}{x} \,, \qquad x = \xi^3 :$$

$$du = \frac{\sqrt{3}}{10}\frac{d\xi}{\sqrt{\xi^3 - 1}} \,.$$

Deshalb heißt die Gleichung für x oder $x - 1$ kurz die *Ikosaedergleichung* und liegt den ausgedehnten Untersuchungen der Herren Klein und Gordan über den Zusammenhang der Ikosaedergleichung mit den Gleichungen fünften

1) Vgl. auch *Werke* Bd. II, S. 174.

Grades zu Grunde. Aus der Zusammensetzung der eingeführten Größen $z_2 z_4 z_6$ dürfen wir schließen, daß die vieldeutigen Wurzeln der Ikosaedergleichung paarweise verknüpft sind, sofern neben z auch $-\frac{1}{z}$, also auch s neben $-\frac{1}{s}$ der Gleichung genügt. Gleichzeitig verwandeln sich z_2, z_4 und z_6 in $-\frac{z_2}{z^2}$, $\frac{z_4}{z^4}$ und $\frac{z_6}{z^6}$, so daß x nebst der Differentialgleichung ungeändert bleibt.

Zur Auflösung der Ikosaedergleichung bedarf es der Konstruktion der Funktion $s\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, x\right)$, entsprechend der Differentialgleichung

$$\frac{s'''}{s'} - \frac{3}{2}\left(\frac{s''}{s'}\right)^2 = \frac{4}{9x^2} - \frac{611}{1800x(x-1)} + \frac{3}{8(x-1)^2} =$$

$$= \frac{864x^2 - 989x + 800}{1800x^2(x-1)^2},$$

folglich

$$A = -\frac{24}{25}, \qquad B = \frac{989}{1800}, \qquad C = -\frac{8}{9}.$$

Leitet man hieraus die Werte von $\alpha\beta\gamma$ ab, so gehen die vier Funktionen

$$F_1\left(-\frac{1}{60}, \frac{11}{60}, \frac{2}{3}, x\right), \qquad F_2\left(\frac{19}{60}, \frac{31}{60}, \frac{4}{3}, x\right), \qquad F_3\left(\frac{29}{60}, \frac{41}{60}, \frac{2}{3}, x\right)$$

und

$$F_4\left(\frac{49}{60}, \frac{61}{60}, \frac{4}{3}, x\right)$$

hervor, welche ihrerseits den linearen Differentialgleichungen genügen mit den Koeffizienten:

$$p_1 = \frac{7x-4}{6x(x-1)}, \quad q_1 = \frac{-11}{3600x(x-1)}; \quad p_2 = \frac{11x-8}{6x(x-1)}, \quad q_2 = \frac{19\cdot 31}{3600x(x-1)},$$

$$p_3 = \frac{13x-4}{6x(x-1)}, \quad q_3 = \frac{29\cdot 41}{3600x(x-1)}; \quad p_4 = \frac{17x-8}{6x(x-1)}, \quad q_4 = \frac{49\cdot 61}{3600x(x-1)}\text{ [1]}.$$

80.

Als weitere Partikularlösungen kann man, wie allgemein

$$x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, x) \quad \text{neben} \quad F = F(\alpha\beta\gamma x),$$

1) In Klein's *Ikosaeder* S. 80 finden sich zu den Lösungen $y_1 y_2$, welche mit einem beliebigen Faktor multipliziert werden dürfen, die abweichenden Werte angegeben:

$$p = \frac{1}{x}, \quad q = -\frac{1}{4x^2(x-1)^2}\left\{\frac{1}{25}x^2 - \frac{811}{900}x + \frac{1}{9}\right\}.$$

so

$$\Phi_1 = x^{\frac{1}{3}} F_2 \quad \text{neben} \quad F_1, \qquad \Phi_2 = x^{-\frac{1}{3}} F_1 \quad \text{neben} \quad F_2,$$

$$\Phi_3 = x^{\frac{1}{3}} F_4 \quad \text{neben} \quad F_3, \qquad \text{und} \qquad \Phi_4 = x^{-\frac{1}{3}} F_3 \quad \text{neben} \quad F_4$$

benutzen, während die bekannten Euler'schen Transformationsformeln

$$F = (1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha,\ \gamma - \beta,\ \gamma,\ x) = (1 - x)^{-\alpha} F\left(\alpha,\ \gamma - \beta,\ \gamma,\ \frac{x}{x - 1}\right)$$

die Gleichungen liefern:

$$F_1 = (1 - x)^{\frac{1}{2}} F_3 = (1 - x)^{\frac{1}{60}} F_5 \quad \text{und} \quad F_2 = (1 - x)^{\frac{1}{3}} F_4 = (1 - x)^{-\frac{19}{60}} F_6 .$$

Hier ist zur Abkürzung geschrieben

$$F_5\left(-\frac{1}{60},\ \frac{29}{60},\ \frac{2}{3},\ \frac{x}{x - 1}\right) \qquad \text{und} \qquad F_6\left(\frac{19}{60},\ \frac{49}{60},\ \frac{4}{3},\ \frac{x}{x - 1}\right).$$

Daraus entspringen für die Ikosaederwurzel s die Formen

$$s\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, x\right) = \frac{a F_1 + b x^{\frac{1}{3}} F_2}{a' F_1 + b' x^{\frac{1}{3}} F_2} = \frac{a F_3 + b x^{\frac{1}{3}} F_4}{a' F_3 + b' x^{\frac{1}{3}} F_4} = \frac{a F_5 - b \left(\frac{x}{x - 1}\right)^{\frac{1}{3}} F_6}{a' F_5 - b' \left(\frac{x}{x - 1}\right)^{\frac{1}{3}} F_6},$$

wo die Verhältnisse der Konstanten $a\, b\, a' b'$ zu bestimmen bleiben. Wenn man dazu die Werte $s_0\ s_\infty\ s_1$ benutzen will, welche die Wurzel s für $x = 0, \infty, 1$ annimmt, so wird man zu beachten haben, daß diese Wurzelwerte *mehrdeutig*, und schon auf reellem Gebiete *vier* Werte

$$s, -\frac{1}{s}, \quad s', -\frac{1}{s'}$$

gleichberechtigt sind[1]), welche

$$\text{für} \quad x = 0 \quad \text{die Gleichung} \quad z_4 = 0 \quad \text{oder} \quad z - \frac{1}{z} = 114 \pm 50\sqrt{5},$$

$$\text{für} \quad x = 1 \quad \text{die Gleichung} \quad z_6 = 0 \quad \text{oder} \quad z - \frac{1}{z} = -261 \pm 125\sqrt{5}$$ [2])

erfüllen, während für $x = \infty$, neben $s'_\infty = 0$ oder $s'_x = \infty$, s_∞ der

1) Vgl. *Ikosaeder* S. 71, Anm.

2) Die obigen Gleichungen ergeben resp.

$$s_0^5 = 57 + 25\sqrt{5} + 5\sqrt{255 + 114\sqrt{5}}$$

und

$$s_1^5 = -\frac{1}{2}\left\{261 + 125\sqrt{5} + 15\sqrt{10(65 + 29\sqrt{5})}\right\},$$

wo selbstverständlich die Vorzeichen der beiden Quadratwurzeln doppeldeutig sind.

Gleichung $z_2 = 0$ oder $z - \frac{1}{z} = -11$ genügt. Da hieraus

$$z = \frac{5\sqrt{5} - 11}{2} = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)$$

folgt, so wollen wir zur näheren Determination

$$s_\infty = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{5}}$$

voraussetzen.

Da allgemein, so lange der reelle Teil von $\gamma - \alpha - \beta$ positiv ist,

$$F(\alpha\,\beta\,\gamma\;1) = \frac{\Gamma\gamma\,\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\,\Gamma(\gamma - \beta)},$$

so wird für

$$x = \infty, \quad F_5 = \frac{\Gamma\frac{2}{3}\,\Gamma\frac{1}{5}}{\Gamma\frac{11}{60}\,\Gamma\frac{41}{60}}, \qquad F_6 = \frac{\Gamma\frac{4}{3}\,\Gamma\frac{1}{5}}{\Gamma\frac{31}{60}\,\Gamma\frac{61}{60}},$$

mithin wenn $s'_\infty = 0$:

$$a\,\Gamma\frac{2}{3}\,\Gamma\frac{31}{60}\,\Gamma\frac{61}{60} = b\,\Gamma\frac{4}{3}\,\Gamma\frac{11}{60}\,\Gamma\frac{41}{60}.$$

Für $x = 0$ dagegen erhält man

$$s'_0 = \frac{a}{a'},$$

während für $x = 1$:

$$s'_1 = \frac{a\,\Gamma\frac{2}{3}\,\Gamma\frac{49}{60}\,\Gamma\frac{61}{60} + b\,\Gamma\frac{4}{3}\,\Gamma\frac{29}{60}\,\Gamma\frac{41}{60}}{a'\,\Gamma\frac{2}{3}\,\Gamma\frac{49}{60}\,\Gamma\frac{61}{60} + b'\,\Gamma\frac{4}{3}\,\Gamma\frac{29}{60}\,\Gamma\frac{41}{60}}.$$

Damit ergeben sich die Ausdrücke:

$$a = \Gamma\frac{4}{3}\,\Gamma\frac{11}{60}\,\Gamma\frac{29}{60}\,\Gamma\frac{41}{60}\;s'_0\,s'_1,$$

$$b = \Gamma\frac{2}{3}\,\Gamma\frac{29}{60}\,\Gamma\frac{31}{60}\,\Gamma\frac{61}{60}\;s'_0\,s'_1,$$

$$a' = \Gamma\frac{4}{3}\,\Gamma\frac{11}{60}\,\Gamma\frac{29}{60}\,\Gamma\frac{41}{60}\;s'_1,$$

$$b' = \Gamma\frac{2}{3}\,\Gamma\frac{61}{60}\left\{\Gamma\frac{29}{60}\,\Gamma\frac{31}{60}\,s'_0 + \Gamma\frac{11}{60}\,\Gamma\frac{49}{60}\,(s'_0 - s'_1)\right\}.$$

81.

Um weitere zulässige Formen abzuleiten, bilden wir die Werte

$$1)\quad s\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{x}{x-1}\right) \qquad \text{nebst}$$

$$F_5\left(-\frac{1}{60}, \frac{29}{60}, \frac{2}{3}, \frac{x}{x-1}\right) \qquad \text{und} \qquad \left(\frac{x}{x-1}\right)^{\frac{1}{3}} F_6\left(\frac{19}{60}, \frac{49}{60}, \frac{4}{3}, \frac{x}{x-1}\right),$$

$$2)\quad s\left(\frac{1}{5},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{1-x}\right)\quad \text{nebst}$$

$$F_7\left(-\frac{1}{60},\ \frac{29}{60},\ \frac{4}{5},\ \frac{1}{1-x}\right)\quad \text{und}\quad \left(\frac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{5}} F_8\left(\frac{11}{60},\ \frac{41}{60},\ \frac{6}{5},\ \frac{1}{1-x}\right),$$

$$3)\quad s\left(\frac{1}{5},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{x}\right)\quad \text{nebst}$$

$$F_9\left(-\frac{1}{60},\ \frac{19}{60},\ \frac{4}{5},\ \frac{1}{x}\right)\quad \text{und}\quad \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{5}} F_{10}\left(\frac{11}{60},\ \frac{31}{60},\ \frac{6}{5},\ \frac{1}{x}\right),$$

$$4)\quad s\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{3},\ 1-x\right)\quad \text{nebst}$$

$$F_{11}\left(-\frac{1}{60},\ \frac{11}{60},\ \frac{1}{2},\ 1-x\right)\quad \text{und}\quad (1-x)^{\frac{1}{2}} F_{12}\left(\frac{29}{60},\ \frac{41}{60},\ \frac{3}{2},\ 1-x\right),$$

$$5)\quad s\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ \frac{x-1}{x}\right)\quad \text{nebst}$$

$$F_{13}\left(-\frac{1}{60},\ \frac{29}{60},\ \frac{1}{2},\ \frac{x-1}{x}\right)\quad \text{und}\quad \left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} F_{14}\left(\frac{29}{60},\ \frac{49}{60},\ \frac{3}{2},\ \frac{x-1}{x}\right).$$

Die Ausdrücke 1) entsprechen der bereits oben aufgestellten Form:

$$s = \frac{aF_5 - b\left(\frac{x}{x-1}\right)^{\frac{1}{3}} F_6}{a'F_5 - b'\left(\frac{x}{x-1}\right)^{\frac{1}{3}} F_6};$$

aus 2) und 3) erhält man analog

$$s = \frac{AF_7 + B\left(\frac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{5}} F_8}{A'F_7 + B'\left(\frac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{5}} F_8} = \frac{AF_9 - B\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{5}} F_{10}}{A'F_9 - B'\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{5}} F_{10}},$$

während aus 4) und 5) hervorgeht:

$$s = \frac{A_1 F_{11} + B_1(1-x)^{\frac{1}{2}} F_{12}}{A_1' F_{11} + B_1'(1-x)^{\frac{1}{2}} F_{12}} = \frac{A_1 F_{13} + B_1\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\frac{1}{2}} F_{14}}{A_1' F_{13} + B_1'\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\frac{1}{2}} F_{14}}.$$

Zu den letzteren Werten ist indessen zu bemerken[1]), daß infolge der Verzweigung im Punkte $x = 1$, für reelle Werte der eingehenden Größen, durch den Faktor

$$(1-x)^{\frac{1}{2}} \quad \text{oder} \quad \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

---

1) Man beachte, daß wenn $x = 1$, s_6 auch für $s_1 = i$ verschwindet.

imaginäre Bestandteile entstehen können, wenn x zwischen 1 und 2 liegt, resp. $x > 1$ genommen wird, während die F-reihen konvergent bleiben.

Es wird sich wiederum um die Berechnung der konstanten Faktoren $ABA'B'\ldots$ mit Hilfe von s'_0 und s'_1 handeln. Zunächst erhält man

für $x = \infty$ $\quad 0 = \frac{A}{A'}$, ferner für $x = 0$ und $x = 1$:

$$s'_0 = \frac{B\,\Gamma\frac{6}{5}\,\Gamma\frac{19}{60}\,\Gamma\frac{49}{60}}{A'\,\Gamma\frac{4}{5}\,\Gamma\frac{31}{60}\,\Gamma\frac{61}{60} + B'\,\Gamma\frac{6}{5}\,\Gamma\frac{19}{60}\,\Gamma\frac{49}{60}},$$

$$s'_1 = \frac{-B\,\Gamma\frac{6}{5}\,\Gamma\frac{29}{60}\,\Gamma\frac{49}{60}}{A'\,\Gamma\frac{4}{5}\,\Gamma\frac{41}{60}\,\Gamma\frac{61}{60} - B'\,\Gamma\frac{6}{5}\,\Gamma\frac{29}{60}\,\Gamma\frac{49}{60}}.$$

Hieraus folgt

$$A = 0,$$

$$B = \Gamma\frac{4}{5}\,\Gamma\frac{61}{60}\left\{\Gamma\frac{19}{60}\Gamma\frac{41}{60} + \Gamma\frac{29}{60}\Gamma\frac{31}{60}\right\}s'_0\,s'_1,$$

$$A' = \Gamma\frac{6}{5}\,\Gamma\frac{19}{60}\Gamma\frac{29}{60}\Gamma\frac{49}{60}(s'_1 - s'_0),$$

$$B' = \Gamma\frac{4}{5}\,\Gamma\frac{61}{60}\left\{\Gamma\frac{19}{60}\Gamma\frac{41}{60}\,s'_1 + \Gamma\frac{29}{60}\Gamma\frac{31}{60}\,s'_0\right\}.$$

Auch findet man leicht[1])

$$\Gamma-\frac{1}{60}\,\Gamma\frac{61}{60} = -\frac{\pi}{\sin 3^0}, \qquad \Gamma\frac{11}{60}\,\Gamma\frac{49}{60} = \frac{\pi}{\sin 33^0},$$

$$\Gamma\frac{19}{60}\,\Gamma\frac{41}{60} = \frac{\pi}{\sin 57^0}, \qquad \Gamma\frac{29}{60}\,\Gamma\frac{31}{60} = \frac{\pi}{\sin 87^0},$$

$$8\sin 3^0 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}-1) - (\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}},$$

$$8\sin 33^0 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}-1) + (\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}},$$

$$8\sin 57^0 = -\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}-1) + (\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}},$$

$$8\sin 87^0 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1) + (\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}}.$$

Überhaupt lassen sich die Gammafunktionen von der Form $\Gamma\left(\frac{m}{60}\right)$ zurückführen auf die Werte von $\Gamma\frac{1}{2}$ oder π, $\Gamma\frac{1}{3}$, $\Gamma\frac{1}{4}$ und $\Gamma\frac{1}{5}$. Dabei

1) Vgl. Lambert, *Beyträge zum Gebrauche der Mathematik* II, S. 135.

kann es für die numerische Berechnung zuweilen von Vorteil sein,

$$\Gamma x = (2\pi)^{1-x} \varDelta x$$

zu setzen, wodurch die Fundamentalgleichungen die Gestalt annehmen:

$$\varDelta x = \lim_{n=\infty} (2n\pi)^{x-1} \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{x \cdot x+1 \cdots x+n-1} = \lim (2n\pi)^{x-\frac{1}{2}} \frac{e^{-n} n^n}{x \cdot x+1 \cdots x+n-1},$$

$$= (2x\pi)^{x-\frac{1}{2}} e^{-X}, \quad X = x - \frac{1}{12x}\left\{1 - \frac{1}{30x^2} + \frac{1}{105x^4} - \frac{1}{140x^6} \pm \cdots\right\},$$

$$\varDelta(mx) = m^{mx-\frac{1}{2}} \varDelta x \varDelta\left(x + \frac{1}{m}\right) \varDelta\left(x + \frac{2}{m}\right) \cdots \varDelta\left(x + \frac{m-1}{m}\right),$$

$$\varDelta x \varDelta(1-x) = \frac{1}{2 \sin x\pi}, \quad \varDelta(x+1) = 2x\pi \varDelta x, \quad \varDelta(m+1) = (2\pi)^m m!.$$

Unter den aufgestellten Formeln kann man speziell die Werte

$$s = \frac{aF_1 + bx^{\frac{1}{3}} F_2}{a' F_1 + b' x^{\frac{1}{3}} F_2} \qquad \text{und} \qquad s = \frac{AF_9 - B\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} F_{10}}{A' F_9 - B' \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} F_{10}}$$

als einander ergänzend betrachten, sofern der erstere für mod $x < 1$, der letztere für mod $x > 1$ konvergiert. Doch sei noch ausdrücklich darauf hingewiesen, daß wegen der Verzweigung der mehrdeutigen Wurzelausdrücke in den Punkten 0, 1 und ∞ besondere Vorsicht beobachtet werden muß, da z. B. eine uneingeschränkte Benutzung der Formeln (26) und (27) in Kummer's Abhandlung S. 59/60 leicht zu Fehlschlüssen Veranlassung geben könnte. So scheinen die daraus folgenden Relationen

$$A = a \frac{\Gamma\frac{2}{3}\, \Gamma\frac{1}{5}}{\Gamma\frac{11}{15}\, \Gamma\frac{41}{60}} - b \frac{\Gamma\frac{4}{3}\, \Gamma\frac{1}{5}}{\Gamma\frac{31}{60}\, \Gamma\frac{61}{60}},$$

$$B = a \frac{\Gamma\frac{2}{3}\, \Gamma - \frac{1}{5}}{\Gamma - \frac{1}{60}\, \Gamma\frac{29}{60}} - b \frac{\Gamma\frac{4}{3}\, \Gamma - \frac{1}{5}}{\Gamma\frac{19}{60}\, \Gamma\frac{49}{60}},$$

auf Widersprüche zu führen. Später wird sich zeigen, daß zwischen den Wurzeln s und s', welche für $x = \infty$ $s_\infty = \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{5}}$ und $s'_\infty = 0$ liefern, eine Gleichung stattfindet von der Form

$$ss' + 2\cos\frac{\pi}{5}(s + s') = 1.$$

82.

Die gefundenen Ausdrücke sind als Wurzeln der Ikosaedergleichung *algebraische* Funktionen von x. Wenn nun Herr Klein, unter voller Anerkennung der Schwarz'schen Priorität (*Ikos.* S. 67), weiter betont (S. 139), daß es nicht schwierig sein würde, die Resultate, die er für die Auflösung der Gleichungen fünften Grades mit Hilfe des Ikosaeders gefunden, als solche an die Spitze zu stellen und in deduktiver Form abzuleiten, während die induktive Methode geeigneter sei, den inneren Gedankengang darzulegen, so mag es doch nicht ohne Interesse erscheinen, umgekehrt von den Gleichungen fünften Grades auszugehen, um auf naturgemäßem Wege daraus die Ikosaedergleichung herzuleiten. Dies gelingt mit Hilfe der folgenden Betrachtungen über Resolventen fünften und sechsten Grades.

Hermite und Brioschi haben gefunden, daß die allgemeinen Gleichungen fünften und sechsten Grades $f_5 = 0$ und $f_6 = 0$, wo

$$f(\overset{5}{x}) = Ax^5 + 5Bx^4 + 10Cx^3 + 10Dx^2 + 5Ex + F,$$

und

$$f(\overset{6}{x}) = Ax^6 + 6Bx^5 + 15Cx^4 + 20Dx^3 + 15Ex^2 + 6Fx + G,$$[1]

durch die rationalen Substitutionen

$$\mathfrak{x} = 3\,\frac{h_3}{f_,} \qquad \text{resp.} \qquad \mathfrak{x} = 2\,\frac{g_4}{f_,}$$

die Gestalt annehmen:

$$\mathfrak{f}_5 = D_5\mathfrak{x}^5 + 10\mathfrak{C}\mathfrak{x}^3 + 5\mathfrak{E}\mathfrak{x} + \mathfrak{F} = 0,$$

und

$$\mathfrak{f}_6 = D_6\mathfrak{x}^6 + 15\mathfrak{C}\mathfrak{x}^4 + 15\mathfrak{E}\mathfrak{x}^2 + 6\mathfrak{F}\mathfrak{x} + \mathfrak{G} = 0,$$

wenn

$$f_, = \frac{1}{5}f'x \qquad \text{resp.} \qquad f_, = \frac{1}{6}f'x,$$

und die Kovarianten

$$h_3 = Hx^3 + \cdots \qquad \text{resp.} \qquad g_4 = Gx^4 + \cdots,$$

nebst

$$H = \begin{vmatrix} A & B & C \\ B & C & D \\ C & D & E \end{vmatrix}, \qquad G = AE - 4BD + 3C^2,$$

geschrieben werden. D_5 und D_6 bedeuten die zugehörigen Diskriminanten,

1) Sollte eine Unterscheidung von dem sonst in anderer Bedeutung gebrauchten G notwendig werden, so mag man in $f(\overset{6}{x})$ G_6 schreiben.

und auch die übrigen Koeffizienten werden Invarianten von f. Setzt man nun

$$y = \mathfrak{x}\sqrt{D_5}\,, \quad \text{resp.} \quad y = \mathfrak{x}\sqrt{D_6}\,,$$

adjungiert also den Koeffizienten von f die Quadratwurzel der Diskriminante, so erhält man die sogenannte *kanonische Gleichungsform* Hermite's[1]):

$$y^5 + 10 A_2 y^3 + 5 A_4 y = \pm A_5 \sqrt{D_5}\,,$$

resp.

$$y^6 + 15 A_2 y^4 + 15 A_4 y^2 + A_6 = \pm A_5 y \sqrt{D_6}\,.$$

In Bd. 13 des *Crelle'schen Journals* S. 347, Dezember 1834 zeigt Jacobi, daß die alternierend zyklische Funktion w der Wurzeln einer Funktion

$$f(\overset{5}{x}) = A \prod_{i=0}^{4} (x - x_i): \qquad w_k = \frac{1}{\sqrt{20}} A\, \mathrm{S} \pm x_0 x_1$$

die bikubische kanonische Resolvente

$$w^6 + a_2 w^4 + a_4 w^2 + a_6 = \pm a_5 w \sqrt{D_5}$$

mit rationalen Koeffizienten liefert. Mit Hilfe einer zweiten alternierend zyklischen Funktion der Wurzeln x_i:

$$\omega_k = \frac{1}{\sqrt{20}} A\, \mathrm{S} \pm x_0 x_1 x_2$$

kann man eine in x lineare Funktion

$$z_k = w_k x - \omega_k$$

einführen, welche der bikubischen kanonischen Gleichung

$$z^6 - 5 g_2 z^4 + 5 (g_2^2 - 2 j_4) z^2 - 5 (25 h_3^2 - f k_1) = \pm f z \sqrt{D_5}$$

entspricht, während

$$k_1 = \mathfrak{A}' x + \mathfrak{B}', \quad g_2 = G x^2 + \cdots, \quad h_3 = H x^3 + \cdots \quad \text{und} \quad j_4 = A' x^4 + \cdots$$

Kovarianten von $f(\overset{5}{x})$ bezeichnen. Da die Variable x *beliebig* gewählt werden darf, so ergibt sich die Jacobi'sche Resolvente für w, sobald man nur die Koeffizienten der höchsten Potenzen von x in z und den resp. Kovarianten beibehält. Dadurch wird

$$w^6 - 5 G w^4 + 5 (G^2 - 2 A') w^2 - 5 (25 H^2 - A \mathfrak{A}') = \pm A w \sqrt{D_5}\,;$$

die für ω geltende Resolvente ergibt sich ebenso, wenn $x = 0$ gesetzt wird.

1) Hermite in seinem Briefe an Borchardt 1861, *Crelle's Journal* Bd. 59, S. 305.

Legt man die kanonische Form

$$f = x^5 + 10Cx^3 + 5Ex + F$$

zu Grunde und substituiert die Werte:

$$G = 3C^2 + E, \qquad H = -C(C^2 - E),$$

$$A' = -(C^2 - E)(3C^2 - E),$$

$$\mathfrak{A}' = CF^2 - E(C^2 - E)(15C^2 + E),$$

$$D_5 = F^4 + 32CF^2(108C^4 - 45C^2E + 5E^2) + 256E^3(5C^2 - E)^2,$$

so folgen

$$G^2 - 2A' = 15C^4 - 2C^2E + 3E^2,$$

$$25H^2 - \mathfrak{A}' = (C^2 - E)(5C^2 - E)^2 - CF^2.$$

83.

Um die Brioschi-Kronecker'sche Form herbeizuführen, schreiben wir:

$$C = b, \qquad E = 9b^2 - 4ac,$$

$$F^2 = 64\{a^3(5b^2 - 4ac)^2 + c^3\} - 64b(27b^4 - 45ab^2c + 20a^2c^2),$$

oder

$$F = 8\varDelta, \quad \varDelta^2 = 16a^5c^2 - 40a^4b^2c + 25a^3b^4 - 20a^2bc^2 + \\ + 45ab^3c - 27b^5 + c^3.$$

Daraus folgt

$$128(4C^2 - E)^2a^3 = F^2 + 16C(108C^4 - 45C^2E + 5E^2) + \sqrt{D_5},$$

$$128c^3 = F^2 + 16C(108C^4 - 45C^2E + 5E^2) - \sqrt{D_5},$$

während die Quadratwurzel der Diskriminante

$$\sqrt{D_5} = 64\{a^3(5b^2 - 4ac)^2 - c^3\}$$

sich als *rationale* Funktion von abc ergibt. Dies darf als eine charakteristische Eigenschaft der gewählten Form betrachtet werden.

Von der kanonischen Gleichung aber

$$x^5 + 10bx^3 + 5(9b^2 - 4ac)x = \pm 8\varDelta$$

hat Brioschi gezeigt, daß auf Grund der Galois-Hermite'schen Untersuchungen die sogenannte *allgemeine* Jacobi'sche Gleichung sechsten Grades, welche für die Größen $z_0 z_1 \ldots z_5$ des Art. 54, Kap. IV Geltung be-

sitzt[1]), in der Kronecker'schen Form:

$$(z^2-a)^6-4a(z^2-a)^5+10b(z^2-a)^3-4c(z^2-a)+5b^2-4ac=0,$$

auf jene Gleichung fünften Grades zurückgeführt werden kann. Die Jacobi'sche Resolvente erhält nunmehr die Koeffizienten

$$G=4(3b^2-ac) \qquad H=4b(2b^2-ac),$$

$$A'=-8(6b^4-7ab^2c+2a^2c^2),$$

$$\mathfrak{A}'=64b\{a^3(5b^2-4ac)^2+c^3\}+16ac(60b^4-39ab^2c-4a^2c^2),$$

neben

$$\pm\sqrt{D_5}=64\{a^3(5b^2-4ac)^2-c^3\}.$$

Ferner wird

$$G^2-2A'=16(15b^4-13ab^2c+3a^2c^2),$$

$$25H^2-A\mathfrak{A}'=64(25b^6-40ab^4c+16a^2b^2c^2+a^3c^3)-$$
$$-64b\{a^3(5b^2-4ac)^2+c^3\},$$

mithin ergibt sich:

$$w^6-20(3b^2-ac)w^4+80(15b^4-13ab^2c+3a^2c^2)w^2-$$
$$-320\{25b^6-40ab^4c+16a^2b^2c^2+a^3c^3-b[a^3(5b^4-4ac)^2+c^3]\}=$$
$$=\pm 64[a^3(5b^2-4ac)^2-c^3]w,$$

wo das Vorzeichen von w beliebig bestimmt werden darf.

Besonders wichtig sind hierbei die speziellen Fälle, in denen eine der Konstanten a, b oder c verschwindet, weil dann eine sogenannte *Normalform* mit nur *einem* wesentlichen Parameter hervorgeht, und weil die entsprechenden Formen stets auf elementarem Wege, z. B. durch geeignete Tschirnhaus-Transformationen, herbeigeführt werden können. Für $b=0$ ergibt sich die sogenannte Bring-Jerrard'sche *Normalform*, welche, wie bereits Art. 53, Kap. IV bemerkt, Eisenstein in der Gestalt

$$\chi^5+\chi=\lambda$$

betrachtet hat, und die auch Jacobi bekannt gewesen zu sein scheint, da er von der *allgemeinen* Gleichung 5. Grades in der Form

$$x^5=10q^2x+p$$

spricht. Diese Normalform ist namentlich von Hermite zur Wurzeldarstellung mittelst elliptischer Modulfunktionen angewandt worden, während Kronecker dazu auch andere Formen der sogenannten allgemeinen bikubischen Jacobi'schen Gleichung benutzt.

1) Vgl. auch den Art. 75 des Kap. VI.

Dem Falle $b = 0$ entsprechen die Gleichungen

$$x^5 - 20acx = 8c\sqrt{16a^5 + c}$$

und

$$w^6 + 20acw^4 + 240a^2c^2w^2 - 320a^3c^3 = 64c^2(16a^5 - c)w\,,$$

also für $ac = \frac{1}{4}$:

$$x^5 - 5x = 8\sqrt{a^3 + c^3} \qquad \text{und} \qquad w^6 + 5w^4 + 15w^2 - 5 = 64(a^3 - c^3)w\,.$$

Für $a = 0$ oder $c = 0$ dagegen erhält man die Brioschi'sche *Normalform*

$$x^5 + 10bx^3 + 45b^2x = 8\sqrt{c^3 - 27b^5} \qquad \text{oder} \qquad = 8b^2\sqrt{25a^3 - 27b}$$

mit der Jacobi'schen Resolvente:

$$w^6 - 60b^2w^4 + 1200b^4w^2 - 8000b^6 = -64c^3w - 320bc^3\,,$$

resp.

$$= 1600a^3b^4w - 8000a^3b^5\,.$$

Bedenkt man nun, daß

$$\text{für } a = 0: \quad \sqrt{D_5} = -64c^3\,, \qquad \text{für } c = 0: \quad \sqrt{D_5} = 1600a^3b^4\,,$$

so kann man kürzer schreiben

$$(w^2 - 20b^2)^3 = (w \pm 5b)\sqrt{D_5}\,.$$

Setzt man endlich

$$\sqrt{D_5} = \mp 108b\varpi\,,$$

so geht die bikubische kanonische Gleichung

$$(w^2 - 20b^2)^3 \pm 108b\varpi(w \pm 5b) = 0$$

als die Jacobi'sche Resolvente der Brioschi'schen Normalform

$$x^5 + 10bx^3 + 45b^2x = \sqrt{108b(\varpi - 16b^4)}$$

hervor. Für $b = \pm\frac{1}{2}$ entsprechen sich die Gleichungen:

$$(w^2 - 5)^3 + 27\varpi(2w + 5) = 0$$

und

$$x^5 \pm 5x^3 + \frac{45}{4}x = \sqrt{\pm 54(\varpi - 1)}\,,$$

wo man für $\varpi > 1$ das obere, für $\varpi < 1$ das untere Vorzeichen zu wählen hat. Zugleich ergeben sich die Werte

$$G = 3\,, \qquad H = \pm 1\,.$$

84.

Die gefundene bikubische Resolvente ist von der Ikosaedergleichung der Herren Schwarz und Klein nur formell verschieden[1]), und darf deshalb in Anbetracht ihrer charakteristischen Eigenschaften kurz als die *Ikosaederresolvente* der Gleichungen fünften Grades bezeichnet werden. Die Beziehung zu der früher aufgestellten Ikosaedergleichung mit der Wurzel s und der Variablen x wird vermittelt durch die Substitutionen

$$y = \frac{1}{2w+5}, \qquad 125y = z - \frac{1}{z} + 11, \qquad z = s^5,$$

während die unabhängige Variable x durch den *Parameter* ϖ ersetzt worden ist.

Schreibt man unter ausdrücklicher Änderung der früheren Bezeichnung zur Abkürzung

$$G = 3(w^2 - 5), \qquad H = (w^2 + 3w + 1)\sqrt{w^2 - 6w + 10},$$

so ergibt sich vermöge der identischen Relation

$$27(2w + 5) = (w^2 + 3w + 1)^2(w^2 - 6w + 10) - (w^2 - 5)^3:$$

$$\varpi = \frac{G^3}{G^3 - 27H^2}, \qquad \varpi - 1 = \frac{27H^2}{G^3 - 27H^2},$$

$$\frac{G^3}{27\varpi} = \frac{H^2}{\varpi - 1} = -27(2w + 5), \qquad \frac{27\varpi}{\varpi - 1} = \frac{G^3}{H^2} = \Omega.$$

Mithin wird

$\varpi = 0$ für $0 < \Omega < 27$, $\varpi > 1$ für $\Omega > 27$, $0 < \varpi < 1$ für $\Omega = 0$,

während die Werte

$\varpi = 0$ und $\Omega = 0$, $\varpi = 1$ und $\Omega = \infty$, $\varpi = \infty$ und $\Omega = 27$

einander entsprechen.

Fügt man die Gleichung

$$J = 16\left(H^2 - \frac{1}{27}G^3\right) = 432(2w + 5) \quad \text{oder} \quad \varpi = -\frac{16}{27}\frac{G^3}{J}$$

hinzu, so bedeutet J die Diskriminante der sogenannten kubischen Resolvente

$$4\lambda^3 = G\lambda + H,$$

1) Vgl. *Leipziger Berichte* vom 4. Dezember 1905.

welche ihrerseits einer biquadratischen Funktion $F(\overset{4}{x})$ mit dem elliptischen Differential

$$du = \frac{M d\varphi}{\sqrt{m^2 \cos^2\varphi + n^2 \sin^2\varphi}} = \frac{dx}{\sqrt{Fx}}$$

und den Invarianten G und H entspricht. Man erhält dann leicht:

$$(5y^2 - 10y + 11)^3 + 12^3 \varpi y^5 = 0\,,$$

oder

$$5y + \frac{1}{y} = 10 - 12\sqrt[3]{\varpi y^2}\,,$$

ferner

$$G = 15(5y^2 - 10y + 1)\,, \qquad G^3 = -180^3 \varpi y^5\,,$$

$$H^2 = 60^3(1 - \varpi)y^5\,, \qquad J = 15^3(4y)^5\,.$$

Die Auflösung der bikubischen Resolvente für y kann vermöge der Gleichung

$$4y = \sqrt[5]{\frac{J}{3375}}$$

durch Ausziehung der fünften Wurzel aus J geleistet werden, sobald die Koeffizienten G und H der kubischen Resolvente ermittelt sind. Es bleibt nun das Verdienst Felix Klein's, die Wurzel der Ikosaedergleichung als Funktion des Modularguments $q = e^{-h}$ durch elliptische Thetafunktionen bestimmt zu haben, nachdem der Parameter

$$\varpi(q) = \frac{g_2^3}{\Delta}$$

durch die sogenannte *absolute Invariante* der zugehörigen Modulfunktionen ausgedrückt worden ist. Und zwar ergibt sich der einfache Ausdruck

$$s = \frac{\vartheta_1\left(\frac{\pi}{5},\ q^{\frac{1}{5}}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{2\pi}{5},\ q^{\frac{1}{5}}\right)}\,,$$

oder nach der Bezeichnung von Herrn Klein, für

$$ss' + 2\cos\frac{\pi}{5}(s + s') = 1\,,$$

$$s' = q^{-\frac{2}{5}}\frac{\vartheta_1(hi,\ q^5)}{\vartheta_1(2hi,\ q^5)}\,, \qquad \text{nebst} \qquad -\frac{1}{s'} = -q^{\frac{2}{5}}\frac{\vartheta_1(2hi,\ q^5)}{\vartheta_1(hi,\ q^5)}\,.$$ [1]

Setzt man

$$G = \varrho^2 g_2\,, \qquad H = \varrho^3 g_3\,, \qquad J = -\frac{16}{27}g^6\Delta\,,$$

1) *Ikosaeder* S. 132 und *Math. Annalen* Bd. 61, S. 560.

so ist leicht einzusehen, daß die Berechnung von q mittelst dieser Invarianten nicht beeinflußt wird durch den eben definierten Faktor ρ, obschon dieser selbst Funktion von q wird. In der Tat beruht die Ableitung des Wertes von

$$q = e^{-h}, \qquad h = \pi \frac{M}{M'},$$

auf der Einführung des *Verhältnisses* der beiden Gauß'schen arithmetisch-geometrischen Mittel M und M' zwischen den Größen

$$m \text{ und } n, \text{ resp. } m \text{ und } n' = \sqrt{m^2 - n^2}.$$

Mittelst der schon S. 99 benutzten Hilfsgrößen

$$\mathfrak{l} = \lg \frac{m}{n}, \qquad \mathfrak{l}_1 = \lg\left(1 + \frac{n}{m}\right) + \frac{1}{2}\mathfrak{l} - \lg 2 = \lg \frac{m_1}{n_1},$$

$$\mathfrak{l}_2 = \lg\left(1 + \frac{n_1}{m_1}\right) + \frac{1}{2}\mathfrak{l}_1 - \lg 2 = \lg \frac{m_2}{n_2}, \qquad \text{usw.}$$

erhält man einfach:

$$\lg q = 2 \lg \frac{n}{4m} + \mathfrak{l} - \frac{3}{2}\left(\mathfrak{l}_1 + \frac{1}{2}\mathfrak{l}_2 + \frac{1}{4}\mathfrak{l}_3 + \frac{1}{8}\mathfrak{l}_4 \ldots\right),$$

$$\lg \vartheta^4 = -(\mathfrak{l} + \mathfrak{l}_1 + \mathfrak{l}_2 + \mathfrak{l}_3 \ldots),$$

$$\lg \vartheta_2^4 = 2 \lg \frac{n'}{m} + \mathfrak{l} - \mathfrak{l}_1 - \mathfrak{l}_2 - \mathfrak{l}_3 \ldots,$$

$$\lg \vartheta_3^4 = \mathfrak{l} - \mathfrak{l}_1 - \mathfrak{l}_2 - \mathfrak{l}_3 \ldots,$$

$$\lg \vartheta_1'^4 = 2 \lg \frac{n'}{m} + \mathfrak{l} - 3(\mathfrak{l}_1 + \mathfrak{l}_2 + \mathfrak{l}_3 \ldots).$$

85.

Die Berechnung von m und n aber richtet sich nach dem Vorzeichen der Diskriminante J. Im Falle $G^3 > 27 H^2$ findet man auf bekanntem Wege für

$$\chi_1 = \prod_{p=1}^{\infty}(1 - q^{2p}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n(3n+1)},$$

$$8 \lg \chi_1 = -\left(\mathfrak{l}_1 + \frac{3}{2}\mathfrak{l}_2 + \frac{7}{4}\mathfrak{l}_3 + \frac{15}{8}\mathfrak{l}_4 \ldots\right):$$

$$\Delta = 16\vartheta_1'^8 = (64q)^2 \chi_1^{24} = (64q)^2(1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} \ldots)^{24},$$

$$g_2 = \frac{4}{3}(\vartheta_3^8 - \vartheta^4 \vartheta_2^4),$$

$$= \frac{4}{3}\left\{1 + 240q^2(1 + 9q^2 + 28q^4 + 73q^6 + 126q^8 \ldots)\right\},$$

$$g_3 = \frac{4}{27}(\vartheta^4 - \vartheta_2^4)(2\vartheta_3^8 + \vartheta^4\vartheta_2^4),$$

$$= \frac{8}{27}\left\{1 - 504q^2(1 + 33q^2 + 244q^4 + 1057q^6 \ldots)\right\},$$

folglich

$$12^3\varpi(q) = \frac{1}{q^2}\,\frac{\{1+240q^2(1+9q^2+28q^4+73q^6+126q^8\ldots)\}^3}{(1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-q^{24}\ldots)^{24}}\,.$$

Aus den drei Wurzeln

$$\lambda_1 = \frac{1}{3}\varrho(\vartheta_3^4+\vartheta^4)\,,\qquad \lambda_2 = \frac{1}{3}\varrho(\vartheta_2^4-\vartheta^4)\,,\qquad \lambda_3 = -\frac{1}{3}\varrho(\vartheta_3^4+\vartheta_2^4)$$

der kubischen Resolvente hat man alsdann die Werte zu bilden:

$$m = \sqrt{\lambda_1-\lambda_3}\,,\qquad n = \sqrt{\lambda_1-\lambda_2}\,,\qquad n' = \sqrt{\lambda_2-\lambda_3}\,.$$

Ist dagegen $G^3 < 27H^2$, so ergeben sich die Ausdrücke[1]):

$$\Delta = -\frac{1}{16}\vartheta^4\vartheta_2^4\vartheta_3^{16} = \frac{1}{256}\vartheta_1'^8(iq^{\frac{1}{2}})$$

$$= -q(1+q-q^2-q^5-q^7-q^{12}\ldots)^{24}\ ^{2)}\,,$$

$$g_2 = \frac{1}{12}(\vartheta_3^8-16\,\vartheta^4\vartheta_2^4)$$

$$= \frac{1}{12}\left\{1-240q(1-9q+28q^2-73q^3+126q^4\ldots)\right\},$$

$$g_3 = \frac{1}{216}(\vartheta^4-\vartheta_2^4)(\vartheta_3^8+32\,\vartheta^4\vartheta_2^4)$$

$$= \frac{1}{216}\left\{1+504q(1-33q+244q^2-1057q^3\ldots)\right\},$$

$$12^3\varpi(q) = -\frac{1}{q}\,\frac{\{1-240q(1-9q+28q^2-73q^3+126q^4\ldots)\}^3}{(1+q-q^2-q^5-q^7-q^{12}\ldots)^{24}}\,,$$

und wenn die reelle Wurzel der Resolvente

$$\lambda = \frac{1}{6}\varrho(\vartheta^4-\vartheta_2^4)\,,\qquad \text{nebst}\qquad \mu^2 = 12\lambda^2 - G:$$

$$m = \sqrt{2\mu}\,,\qquad n = \sqrt{\mu+3\lambda}\,,\qquad n' = \sqrt{\mu-3\lambda}\,.$$

Für $G^3 > 27H^2$ wird $\varpi > 1$, für $G^3 < 27H^2$ dagegen liegt ϖ zwischen 0 und 1, solange $G < 0$, und wird *negativ* für $G > 0$, während für $q = 0$, $G = \frac{1}{12}\varrho^2 = \infty$, neben $G^3 = 27H^2$ und $\varpi = \pm\infty$. Mithin wechseln beim Durchgange von g_2 durch $\frac{1}{12}$, oder von G durch $\frac{1}{12}\varrho^2 = \infty$, ϖ und $G^3 - 27H^2$ das Vorzeichen, so daß man für $g_2 > \frac{1}{12}$ auf den Fall $G^3 > 27H^2$, $\varpi > 1$ zurückkommt. Um kein Mißverständnis entstehen zu

1) Man vgl. *Math. Annalen* Bd. 34, S. 525 ff.

2) Die Exponenten bilden die Reihe der sogen. Pentagonalzahlen $\frac{1}{2}n(3n\pm 1)$.

lassen, mag hier noch ausdrücklich hervorgehoben werden, daß wenn man die für $G^3 > 27 H^2$ geltenden Formeln auf den Fall einer *negativen* Diskriminante Δ anwenden will, man *imaginäre* Werte von q zu Hülfe nehmen muß.

86.

Es ist vielleicht nicht ohne Interesse, an einem einfachen numerischen Beispiel die bequeme Anwendbarkeit der entwickelten Formeln zu prüfen. Wir wählen hierzu die Parameterwerte

$$\bar{\omega}_1 = -\frac{1}{99} \quad \text{und} \quad \bar{\omega}_2 = +\frac{1}{101},$$

welche beide dem Falle $G^3 < 27 H^2$ angehören. Um die Wurzel der Ikosaedergleichung mittelst elliptischer Modulfunktionen zu berechnen, hat man von einer den gegebenen Werten von $\bar{\omega}$ entsprechenden kubischen Resolvente auszugehen. Eine solche ist

$$4\lambda'^3 = \pm 3\lambda' + 10, \quad \lambda'_1 = 1.54043, \quad \lambda'_2 = 1.17429,$$

wobei ich bemerke, daß für $4\lambda^3 = G\lambda + H$:

$$\lambda = \frac{1}{6}\varrho(\vartheta^4 - \vartheta_2^4) = \varrho'\lambda', \qquad G = \pm 3\varrho'^2, \qquad H = 10\varrho'^3$$

zu setzen ist. Die zugehörigen Werte des Modularguments ergeben

$$\lg q_1 = 7.430528, \qquad \lg q_2 = 7.825712.$$

Damit folgt weiter:

$$\lg s_1 = 9.487277\,n, \qquad \lg s_2 = 9.568059\,n,$$

$$\lg y_1 = 0.479555, \qquad \lg y_2 = 0.094648,$$

$$\lg w_1 = 0.368150\,n, \qquad \lg w_2 = 0.321780\,n.$$

Die beiden gefundenen Werte erfüllen die Ikosaedergleichung in der Form

$$5y + \frac{1}{y} = 10 - 12\sqrt[3]{\bar{\omega} y^2},$$

$$w^2 = 5 - 3\sqrt[3]{\bar{\omega}(2w + 5)}.$$

Will man schließlich noch den Wert des Faktors ϱ bestimmen, so kann man sich der Formeln bedienen:

$$\varrho = \left[-\frac{27}{16}\frac{J}{\Delta}\right]^{\frac{1}{6}} = \left[-\frac{27^2(2w+5)}{\Delta}\right]^{\frac{1}{6}} = 3\sqrt[6]{\frac{-1}{\Delta y}},$$

und dabei etwa ausgehen von den Reihenentwickelungen für die Wurzeln s' resp. s:

$$s' = q^{\frac{2}{5}} \frac{1 - q^2 - q^8 + q^{14} + q^{26} \dots}{1 - q^4 - q^6 + q^{18} + q^{22} \dots},$$

$$= q^{\frac{2}{5}} \frac{1 - q^2 + q^4 - q^8 - q^{22} \dots}{1 - q^{10} - q^{20} + q^{50} \dots},$$

$$= q^{\frac{2}{5}} \frac{1 - q^{10} - q^{30} + q^{50} \dots}{1 + q^2 - q^6 - q^{14} - q^{16} - q^{28} + q^{40} \dots} \; ^{1)},$$

oder

$$s = \frac{\Sigma (-1)^n q^{\frac{1}{5}(n+\frac{1}{2})^2} e^{(2n+1)\frac{\pi i}{5}}}{\Sigma (-1)^n q^{\frac{1}{5}(n+\frac{1}{2})^2} e^{(2n+1)^2 \frac{\pi i}{5}}},$$

$$= \frac{\Sigma (-1)^n q^{\frac{1}{5} n(3n+1)}}{\Sigma q^{\frac{1}{5} n(3n+1)} 2 \cos (n+1) \frac{\pi}{5}}.$$

Auch kann man bemerken, daß wenn durch eine lineare Transformation (erster Ordnung) der elliptischen Funktionen das Modulargument q in q' verwandelt wird, die sogen. absolute Invariante des elliptischen Differentials

$$\varpi(q) = \frac{g_2^3}{\Delta} = \varpi(q')$$

durch diese Transformation ungeändert bleibt. Mithin muß eine Ikosaederwurzel $s(q)$ durch den Übergang von q zu q' in eine beliebige andere

$$s' = s(q')$$

verwandelt werden. Von den allgemeinen Eigenschaften der *„linearen Transformation der Thetafunktionen und elliptischen Modulfunktionen“* abhandelt das nächstfolgende Kapitel VIII; im einfachsten Falle geht bekanntlich $q = e^{-\pi \frac{M}{M'}}$ über in $q' = e^{-\pi \frac{M'}{M}}$.

1) Unter Vernachlässigung von q^{20} kann man dafür schreiben:

$$s' = q^{\frac{2}{5}} (1 + q^{10})(1 - q^2 + q^4 - q^8),$$

und wenn man für $\Delta < 0$ q mit $iq^{\frac{1}{2}}$ vertauscht, also q^{10} vernachlässigt:

$$s' = -q^{\frac{1}{5}} (1 - q^5)(1 + q + q^2 - q^4).$$

Anhang, Abschnitt IV.

VIII. Zur linearen Transformation der Thetafunktionen und elliptischen Modulfunktionen.

87.

Die bekannte Transformationsgleichung

$$e^{\frac{lu^2 i}{p}} \vartheta_1(u, q) = c\sqrt{\frac{\pi}{p}}\, \vartheta_1(u', q')$$

setzt voraus, daß für

$$q = e^{-h} = e^{\mathfrak{h}\pi i}, \qquad q' = e^{-h'} = e^{\mathfrak{h}'\pi i}, \qquad \text{also} \quad hi = \mathfrak{h}\pi \quad \text{usw.}$$

die Exponenten $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}'$ (mit positivem imaginären Teile) durch lineare Gleichungen von der Form

$$\mathfrak{h}' = \frac{k' + l'\mathfrak{h}}{k + l\mathfrak{h}} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{h} = \frac{k\mathfrak{h}' - k'}{l' - l\mathfrak{h}'},$$

nebst

$$l' - l\mathfrak{h}' = \frac{1}{k + l\mathfrak{h}} \quad \text{und} \quad \frac{k\mathfrak{h}' - k'}{\mathfrak{h}'} = \frac{\mathfrak{h}}{k' + l'\mathfrak{h}}$$

verbunden sind, wo die ganzen positiven oder negativen Zahlen $k\,l\,k'\,l'$ der Bedingung genügen

$$kl' - lk' = 1 .$$

Das Argument der Amplitude ist durch die Gleichung $\pi u = pu'$, d. h.

$$u = (k + l\mathfrak{h})\,u' \quad \text{oder} \quad u' = (l' - l\mathfrak{h}')\,u$$

gegeben, während

$$p = \pi(k + l\mathfrak{h}) = \frac{\pi}{l' - l\mathfrak{h}'}$$

geschrieben und $\sqrt{\frac{\pi}{p}}$ *stets mit positivem reellen Teile* zu verstehen ist.

Für $kl' - lk' = n$ (wo $k\,l\,k'\,l'$ ohne gemeinschaftlichen Teiler sein sollen) bezeichnet man die entsprechende Transformation der elliptischen

Funktionen als von der n-ten Ordnung; für $kl' < lk'$ würde der absolute Wert des Modularguments q oder $\operatorname{mod} q = |q| > 1$ werden. Im Folgenden werden wir uns auf *die lineare Transformation der ersten Ordnung* beschränken.

Der besondere Fall $q = q'$ tritt für diejenigen Werte von $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}'$ ein, welche der Bedingung der sogen. komplexen Multiplikation unterworfen sind, d. h. der quadratischen Gleichung [1])

$$l\mathfrak{h}^2 + (k - l')\mathfrak{h} - k' = 0$$

genügen, folglich

$$l\mathfrak{h} = \frac{l' - k}{2} \pm i\sqrt{1 - \left(\frac{k + l'}{2}\right)^2}, \qquad \frac{p}{\pi} = \frac{k + l'}{2} \pm i\sqrt{1 - \left(\frac{k + l'}{2}\right)^2},$$

$$q = e^{\frac{l' - k}{2l}\pi i - \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{4 - (k + l')^2}{l^2}}},$$

wobei die doppeldeutigen Quadratwurzeln mit dem Vorzeichen von l zu nehmen sind, damit $|q|$ die Einheit nicht erreiche. Auch darf $k + l'$ nur die Werte $0, \pm 1,$ annehmen. Beispielsweise ergeben sich für

$$k = 0, \quad l = 1, \quad k' = -1$$

die Substitutionen

$$l' = 0, \qquad \mathfrak{h} = i, \qquad q = q' = e^{-\pi},$$

$$l' = \pm 1, \qquad \mathfrak{h} = \pm\frac{1}{2} + i\sqrt{\frac{3}{4}}, \qquad q = q' = \pm i e^{-\pi\sqrt{\frac{3}{4}}},$$

$$l' = \pm 2, \qquad \mathfrak{h} = \pm 1, \qquad q = q' = -1.$$

Die Gleichung

$$\mathfrak{h} = \frac{-4 - 3\mathfrak{h}}{1 + \mathfrak{h}} \quad \text{oder} \quad k = l = 1, \quad k' = -4, \quad l' = -3$$

aber liefert

$$\mathfrak{h} = -2, \qquad q = q' = 1,$$

während für $l = 0$, wegen $k = l' = \pm 1$:

$$\mathfrak{h} = \frac{k'}{k - l'} = \infty$$

wird.

Dagegen erhält man $q' = -q$ für

$$lh = \frac{l' - k \mp l}{2} \pm i\sqrt{1 - \left(\frac{k + l' \mp l}{2}\right)^2}.$$

---

1) In meiner Abhandlung *über das Legendre-Jacobi'sche Symbol* II, S. 69 ist $\mathfrak{h}^2 - \sigma\mathfrak{h} + \tau = 0$ geschrieben.

88.

Da für $kl' - lk' = 1$ die Produkte kl' und lk' nicht gleichzeitig gerade oder ungerade sein können, so wird man sechs Fälle zu unterscheiden haben, je nachdem

1) $k(g)\ l(u)\ k'(u)\ l'(u)$, 2) $k(g)\ l(u)\ k'(u)\ l'(g)$,

3) $k(u)\ l(g)\ k'(u)\ l'(u)$, 4) $k(u)\ l(g)\ k'(g)\ l'(u)$,

5) $k(u)\ l(u)\ k'(g)\ l'(u)$, 6) $k(u)\ l(u)\ k'(u)\ l'(g)$.

Auch ist leicht einzusehen, da eine Vertauschung von $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}'$ oder von q und q' hervorgeht, wenn man k, l, k', l' durch $l', -l, -k'$ und k ersetzt, daß dabei die Fälle 1) und 6) ineinander übergehen.

Wir bemerken noch, daß eine gleichzeitige Umkehr der Vorzeichen der Zahlen $kl\ldots$ gestattet ist, ohne daß der Wert von q' oder der Exponentialgröße $e^{\frac{lu^2 i}{p}}$ sich ändert. Da aber u' mit p den entgegengesetzten Wert annimmt, so muß der Faktor $c\sqrt{\frac{\pi}{p}}$ in der Transformationsgleichung die nämliche Änderung erfahren. Übrigens kann man durch den Vorzeichenwechsel immer erzielen, daß ein bestimmter Zähler oder Nenner der Symbole $\left(\frac{k}{l}\right)$ ein gegebenes Vorzeichen erhält.

Aus der Gleichung $kl' - lk' = 1$ gehen, wenigstens insoweit die vorkommenden Nenner positive ungerade Zahlen bedeuten, die Relationen hervor:

1 2 5 6) $\left(\frac{k}{l}\right) = \left(\frac{l'}{l}\right)$, 3 4 5 6) $\left(\frac{l}{k}\right) = (-1)^{\frac{k-1}{2}}\left(\frac{k'}{k}\right)$,

1 2 3 6) $\left(\frac{k}{k'}\right) = \left(\frac{l'}{k'}\right)$, 1 3 4 5) $\left(\frac{l}{l'}\right) = (-1)^{\frac{l'-1}{2}}\left(\frac{k'}{l'}\right)$,

1 5) $\left(\frac{k}{l}\right) = (-1)^{\frac{l+1}{2}\cdot\frac{l'-1}{2}}\left(\frac{k'}{l'}\right)$, 3 6) $\left(\frac{l}{k}\right) = (-1)^{\frac{k-1}{2}\cdot\frac{k'+1}{2}}\left(\frac{l'}{k'}\right)$,

5 6) $\left(\frac{k'}{k}\right) = (-1)^{\frac{k-1}{2}\cdot\frac{l+1}{2}}\left(\frac{l'}{l}\right)$, 1 3) $\left(\frac{k}{k'}\right) = (-1)^{\frac{k'+1}{2}\cdot\frac{l'-1}{2}}\left(\frac{l}{l'}\right)$.

Bei den einzelnen Gleichungen ist bemerkt, für welche Fälle sie Gültigkeit haben; wenn in diesen Ausdrücken ein Nenner k oder $l\ldots$ sein Vor-

zeichen umkehrt, so hat man einfach in den zugehörigen Exponenten

$$\frac{k-1}{2} \quad \text{und} \quad \frac{k+1}{2}, \qquad \text{oder} \qquad \frac{l-1}{2} \quad \text{und} \quad \frac{l+1}{2} \ldots$$

miteinander zu vertauschen.

89.

Schreibt man

$$\vartheta_1(u, q) = e^{-\frac{u^2}{\mathfrak{h}}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n+\frac{1}{2}} q^{\left(n+\frac{1}{2}+\frac{ui}{\mathfrak{h}}\right)^2},$$

so nimmt die Transformationsgleichung die Form an:

$$e^{-\frac{k' u^2 i}{p \mathfrak{h} \mathfrak{h}'}} \sum (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}+\frac{u}{\pi \mathfrak{h}}\right)^2} = c \sqrt{\frac{\pi}{p}} \sum (-1)^n q'^{\left(n+\frac{1}{2}+\frac{u'}{\pi \mathfrak{h}'}\right)^2}.$$

Um den Faktor c durch eine achte Einheitswurzel auszudrücken, lassen wir p unbegrenzt abnehmen[1]), und setzen

$$p = \sigma \pi i, \qquad u = u' \sigma i,$$

mithin

$$\mathfrak{h} = -\frac{k}{l} + \frac{\sigma i}{l}, \qquad \mathfrak{h}' = \frac{l'}{l} + \frac{i}{l \sigma},$$

$$q = e^{-\frac{\pi \sigma}{l} + \frac{k \pi i}{l}}, \qquad q' = e^{-\frac{\pi}{l \sigma} + \frac{l' \pi i}{l}},$$

wo l und σ mit gleichen Vorzeichen zu nehmen sind. Während σ und q' mit p zur Null konvergieren, nähert sich mod q immer mehr der Einheit. Führt man zugleich den Wert

$$u = \frac{\pi}{2l}, \qquad \text{also} \qquad u' = \frac{\pi}{2 l \sigma i}$$

ein, so geht die Transformationsgleichung über in

$$\lim_{\sigma=0} \sqrt{\sigma i}\, \vartheta_1\left(\frac{\pi}{2l}, q\right) = c \lim e^{-\frac{\pi}{4 l \sigma}} \vartheta_1\left(\frac{\pi}{2 l \sigma i}, q'\right).$$

Die rechte Seite liefert sogleich:

$$\vartheta_1\left(\frac{\pi}{2 l \sigma i}, q'\right) = \frac{1}{i} \sum (-1)^n e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi}{l \sigma} + \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \frac{l' \pi i}{l} + \left(n+\frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{l \sigma}},$$

$$= \frac{1}{i} e^{\frac{\pi}{4 l \sigma} + \frac{l' \pi i}{4 l}} \sum_n (-1)^n e^{-\frac{n^2 \pi}{l \sigma} + n(n+1) \frac{l' \pi i}{l}},$$

---

1) *Zur Theorie des Legendre-Jacobi'schen Symbols* $\left(\frac{n}{m}\right)$, Art. 22, S. 403.

und da für $\sigma = 0$ offenbar $\sum_n = 1$ wird,

$$\lim \vartheta_1(u' q') = \frac{1}{i} e^{\frac{\pi}{4 l \sigma} + \frac{l' \pi i}{l}},$$

folglich

$$\lim \sigma i \, \vartheta_1\left(\frac{\pi}{2l}, q\right) = \frac{c}{i} e^{\frac{l' \pi i}{l}}.$$

Auf der linken Seite wollen wir in der Summe

$$\frac{1}{i} \sum_n (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{(2n+1)\frac{\pi i}{2l}}$$

$n = l\mu + \lambda$ setzen, und λ ein Restensystem modulo l, μ und n alle Zahlen zwischen $\pm \infty$ durchlaufen lassen. Dann wird

$$\vartheta_1\left(\frac{\pi}{2l}, q\right) = \frac{1}{i} \mathop{\mathrm{S}}_{\lambda}^{\bmod l} (-1)^{\lambda} e^{-(\lambda+\frac{1}{2})^2 \frac{k \pi i}{l} + (\lambda + \frac{1}{2}) \frac{\pi i}{l}} \sum_\mu,$$

$$\sum_\mu = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^{\mu(k+1)(l+1)} e^{-\pi l \sigma \left(\frac{2\lambda+1}{2l}\right)^2}.$$

Schreibt man ferner

$$l\sigma = \xi^2, \qquad \nu = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{\sigma}{l}},$$

und bedenkt, daß wegen $kl' - lk' = 1$ k und l nicht gleichzeitig gerade sein können, also $(-1)^{(k+1)(l+1)} = +1$ sein muß, so wird wegen

$$\lim_{\xi = 0} \sum_\mu \xi e^{-\pi(\mu \xi + \nu)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1,$$

$$\lim \sqrt{l\sigma} \sum_\mu e^{-\pi l \sigma \left(\mu + \frac{2\lambda+1}{2l}\right)^2} = 1,$$

und damit

$$\lim \sqrt{\sigma} i \, \vartheta_1\left(\frac{\pi}{2l}, q\right) = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{i}{l}} \mathop{\mathrm{S}}_{\lambda}^{l} (-1)^{\lambda} e^{-(\lambda+\frac{1}{2})^2 \frac{k \pi i}{l} + (\lambda + \frac{1}{2}) \frac{\pi i}{l}},$$

$$c = \sqrt{\frac{i}{l}} e^{-\frac{l' \pi i}{4 l}} \mathop{\mathrm{S}}_{\lambda}^{l} (-1)^{\lambda} e^{-(\lambda+\frac{1}{2})^2 \frac{k \pi i}{l} + (\lambda + \frac{1}{2}) \frac{\pi}{l}},$$

oder für

$$2k_1 = (k-1)(l-1):$$

$$c = \sqrt{\frac{i}{l}} e^{-\frac{(k+l'-2)\pi i}{4l}} \mathop{\mathrm{S}}_{\lambda}^{l} (-1)^{k\lambda} e^{-(k\lambda^2 - 2k_1\lambda)\frac{\pi i}{l}}.$$

Die Summe $\overset{l}{\underset{\lambda}{\mathrm{S}}}$ läßt sich noch vereinfachen und ergibt wegen $kl'-lk'=1$:

$$\mathrm{S}(-1)^{k\lambda} e^{-(\lambda^2-2k_1l'\lambda)\frac{k\pi i}{l}} = e^{\frac{kk_1^2l'^2\pi i}{l}} \mathrm{S}(-1)^{k\lambda} e^{-(\lambda-k_1l')^2\frac{k\pi i}{l}} =$$

$$= (-1)^{(k+k')k_1l'} e^{-\frac{k_1^2l'\pi i}{l}} \mathrm{S}(-1)^{k\lambda} e^{-\lambda^2\frac{k\pi i}{l}}.$$

Da ferner

$$\frac{k_1^2l'}{l} = \frac{k+l'-2}{4l} + \frac{(k-1)^2(k-2)l'}{4} + \frac{(k-2)k'}{4},$$

so folgt

$$c = (-1)^{(k+k')kl'} e^{[(k-1)^2(l-2)l'+(k-2)k']\frac{\pi i}{4}} \sqrt{\frac{i}{l}}\, \mathrm{S}_\lambda(-1)^{k\lambda} e^{-\lambda^2\frac{k\pi i}{l}}.$$

90.

Nun liefert die Theorie der Gauß'schen Summen[1]), wenn zur Abkürzung $\omega = e^{\frac{\pi i}{4}}$ geschrieben wird, den Wert der Summe

$$\overset{l}{\underset{\lambda}{\mathrm{S}}}(-1)^{k\lambda} e^{\lambda^2\frac{k\pi i}{l}} = \omega^{-l}\left(\frac{k}{l}\right)\sqrt{li}$$

für positive ungerade l und beliebige k, dagegen

$$\overset{l}{\underset{\lambda}{\mathrm{S}}} = \omega^{-kl+k-1}\left(\frac{l}{k}\right)\sqrt{li}$$

für positive ungerade Werte von k und beliebige l. Die Werte der Quadratwurzeln sind stets mit positivem reellen Teile zu verstehen, während das Vorzeichen von i beliebig umgekehrt werden darf, wodurch ω in ω^{-1} übergeht.

Hiernach erhält man für ungerade Werte von l oder $l(u)$:

$$c_1 = (-1)^{(k+k')k_1l'} \omega^{(k-1)^2(l-2)l'+(k-2)k'+l}\left(\frac{k}{\pm l}\right),$$

und für ungerade Werte von k oder $k(u)$:

$$c_2 = (-1)^{(k+k')k_1l'} \omega^{(k-1)^2(l-2)l'+(k-2)k'+k(l-1)+1} \varepsilon\left(\frac{l}{\pm k}\right).$$

Hier bezeichnet $\pm l$, resp. $\pm k$, den absoluten Wert des ungeraden Nenners, k_1 ist zur Abkürzung für $\frac{1}{2}(k-1)(l-1)$ geschrieben, und wenn k und l

1) Man vgl. z. B. Lebesgue, *Liouville's Journal* 1847, S. 497 und 1850, S. 215, Hermite, das. 1858, S. 29, oder *Das Legendre-Jacobi'sche Symbol* I, Art. 18.

beide negativ sind, so ist dem Werte von c_2 der Faktor $\varepsilon = -1$ hinzuzufügen. Das Gleiche gilt von der Formel des Reziprozitätsgesetzes

$$\left(\frac{k}{l}\right) = (-1)^{\frac{k-1}{2}\cdot\frac{l-1}{2}}\varepsilon\left(\frac{l}{k}\right) = \omega^{(k-1)(l-1)}\varepsilon\left(\frac{l}{k}\right),$$

während in der Gleichung

$$\left(\frac{-1}{k}\right) = (-1)^{\frac{k-1}{2}}\varepsilon$$

die Einheit ε das Vorzeichen von k ausdrückt. Für einen verschwindenden Zähler hat man $\left(\frac{0}{k}\right) = 1$ zu setzen.

Um zu bequemeren Ausdrücken zu gelangen, untersuchen wir zunächst die in den angeführten sechs Fällen eintretenden Vereinfachungen. Man findet nach geeigneter Reduktion für 1) und 2) oder $k(g)$:

$$(-1)^{(k+k')k_1 l'}\omega^{(k-1)^2(l-2)l'+(k-2)k'} = \omega^{kk'-ll'-2k'},$$

dagegen wird in den Fällen 3) bis 6), so oft k ungerade:

$$(-1)^{(k+k')k_1 l'}\omega^{(k-1)^2(l-2)l'+(k-2)k'} = (-1)^{\frac{k-1}{2}}\omega^{-kk'}.$$

Damit folgt einerseits für $k(g)$, $l(u)$:

$$c_1 = \omega^{kk'-ll'-2k'+l}\left(\frac{k}{l}\right) = \omega^{-l(k+l'-3)}\left(\frac{k}{l}\right),$$

weil jetzt $(k-2)(l+k') \equiv 0 \bmod 8$. Andererseits ergibt sich für $k(u)$

$$c_2 = \omega^{kl-kk'+k-1}\varepsilon\left(\frac{l}{k}\right) = \omega^{k(l-k')-3(k-1)}\varepsilon\left(\frac{l}{k}\right).$$

Sind k und l gleichzeitig ungerade, so erhält man daraus durch Vermittelung des Reziprozitätssatzes

$$c_1 = \omega^{2kl-kk'-l}\left(\frac{k}{l}\right) = \omega^{-l(k+l'-3)}\left(\frac{k}{l}\right),$$

weil für $k(u)$, $l(u)$: $\qquad k(l+k') \equiv ll' \bmod 8.$

Man erkennt aus dem Vorstehenden, daß die beiden Werte

$$c_1 = \omega^{-l(k+l'-3)}\left(\frac{k}{l}\right) \quad \text{und} \quad c_2 = \omega^{k(l-k')-3(k-1)}\varepsilon\left(\frac{l}{k}\right)$$

für ungerade Werte ihrer Nenner *allgemeine* Gültigkeit besitzen. Für $u = 0$ wird

$$\sqrt{\frac{p}{\pi}}\,\vartheta_1' q = c\,\frac{\pi}{p}\,\vartheta_1' q', \qquad c = \frac{p}{\pi}\sqrt{\frac{p}{\pi}}\,\frac{\vartheta_1' q}{\vartheta_1' q'},$$

und damit

$$\left(\frac{k}{l}\right) = \omega^{l(k+l'-3)} \frac{p}{\pi} \sqrt{\frac{p}{\pi}} \frac{\vartheta_1' q}{\vartheta_1' q'}, \qquad l(u),$$

$$\varepsilon \left(\frac{l}{k}\right) = \omega^{k(k'-l+k-1)} \frac{p}{\pi} \sqrt{\frac{p}{\pi}} \frac{\vartheta_1' q}{\vartheta_1' q'}, \qquad k(u).$$

Es handelt sich noch um den Übergang von ϑ_1 zu den koordinierten Thetafunktionen. Dies geschieht durch Änderung von u um $\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{\mathfrak{h}}{2}\pi$ mittelst der bekannten Relationen:

$$\vartheta_1 (u + \tfrac{1}{2}\pi, q) = \vartheta_2 (u, q) \qquad \text{neben} \qquad \vartheta_1 (u' + \tfrac{l' - l\mathfrak{h}'}{2}\pi, q),$$

$$\vartheta_1 (u + \tfrac{\mathfrak{h}}{2}\pi, q) = i q^{-\frac{1}{4}} e^{-ui} \vartheta (u, q) \qquad \text{neben} \qquad \vartheta_1 (u' + \tfrac{k\mathfrak{h}' - k'}{2}\pi, q),$$

und

$$\vartheta_1 (u + \tfrac{\mathfrak{h} + 1}{2}\pi, q) = q^{-\frac{1}{4}} e^{-ui} \vartheta_1 (u, q)$$

neben

$$\vartheta_1 (u' + \frac{(k-l)\mathfrak{h}' - k' + l'}{2}\pi, q'),$$

wo für $\mu = m + n\mathfrak{h}'$ und ungerade Werte von m und n:

$$\vartheta_1 (u' + \tfrac{\mu}{2}\pi, q') = (-1)^{\frac{m-1}{2}} q'^{-\frac{n^2}{4}} e^{-nu'i} \vartheta_3 (u', q'),$$

während für $m(g)$, $n(u)$

$$\vartheta_1 (u' + \tfrac{\mu}{2}\pi, q') = (-1)^{\frac{m}{2}} \omega^{2n} q'^{-\frac{n^2}{4}} e^{-nu'i} \vartheta (u', q'),$$

und für $m(u)$, $n(g)$

$$\vartheta_1 (u' + \tfrac{\mu}{2}\pi, q') = (-1)^{\frac{m-1}{2}} q'^{-\frac{n^2}{4}} e^{-nu'i} \vartheta_2 (u', q')$$

zu substituieren bleiben.

91.

Obgleich seit dem Begründer der Theorie (Jacobi in seinen *Königsberger Vorlesungen*, vgl. *Crelle's Journal*, Bd. 36, S. 111) zahlreiche Autoren die auf die lineare Transformation bezüglichen Ausdrücke behandelt haben[1]), so lassen wir doch zur bequemeren Vergleichung eine über-

1) Wir zitieren hier nur Hermite (*Liouville's Journal* 1858, Bd. 23, S. 26), H. Smith (*Math. Papers* ed. Glaisher, Vol. I, Nr. 10, 1865 und Vol. II, Nr. 43),

sichtliche Zusammenstellung der verschiedenen in Betracht kommenden Fälle folgen.

Schreibt man zur Abkürzung:

$$\alpha_1 = \omega^{-l(l'-1)}\left(\frac{k}{l}\right), \qquad \beta_1 = \omega^{-l(k-1)}\left(\frac{k}{l}\right),$$

$$\gamma_1 = \omega^{l}\left(\frac{k}{l}\right), \qquad c_1 = \alpha_1 \beta_1 \gamma_1,$$

$$\alpha_2 = \omega^{-kk'-(k-1)}\varepsilon\left(\frac{l}{k}\right), \qquad \beta_2 = \omega^{-(k-1)}\varepsilon\left(\frac{l}{k}\right),$$

$$\gamma_2 = \omega^{kl-(k-1)}\varepsilon\left(\frac{l}{k}\right), \qquad c_2 = \alpha_2 \beta_2 \gamma_2,$$

so findet man in den angeführten Fällen 1) bis 6) nach Ausführung der erforderlichen Reduktionen:

1) $k(g)\ l(u)\ k'(u)\ l'(u)$:

$$e^{\frac{lu^2 i}{p}}\,\vartheta(u, q) = \alpha_1\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,\vartheta_2(u', q'), \qquad e^{\frac{lu^2 i}{p}}\,\vartheta_1(u, q) = c_1\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,\vartheta_1(u', q'),$$

$$e^{\frac{lu^2 i}{p}}\,\vartheta_2(u, q) = \beta_1\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,\vartheta_3(u', q'), \qquad e^{\frac{lu^2 i}{p}}\,\vartheta_3(u, q) = \gamma_1\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,\vartheta(u', q').$$

2) $k(g)\ l(u)\ k'(u)\ l'(g)$:

$$e^{\frac{lu^2 i}{p}}\,\vartheta(u, q) = \alpha_1\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,\vartheta_2(u', q'), \qquad e^{\frac{lu^2 i}{p}}\,\vartheta_1(u, q) = c_1\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,\vartheta_1(u', q'),$$

$$e^{\frac{lu^2 i}{p}}\,\vartheta_2(u, q) = \beta_1\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,\vartheta(u', q'), \qquad e^{\frac{lu^2 i}{p}}\,\vartheta_3(u, q) = \gamma_1\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,\vartheta_3(u', q').$$

3) $k(u)\ l(g)\ k'(u)\ l'(u)$:

$$e^{\frac{lu^2 i}{p}}\,\vartheta(u, q) = \gamma_2\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,\vartheta_3(u', q'), \qquad e^{\frac{lu^2 i}{p}}\,\vartheta_1(u, q) = c_2\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,\vartheta_1(u', q'),$$

$$e^{\frac{lu^2 i}{p}}\,\vartheta_2(u, q) = \alpha_2\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,\vartheta_2(u', q'), \qquad e^{\frac{lu^2 i}{p}}\,\vartheta_3(u, q) = \beta_2\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,\vartheta(u', q').$$

Königsberger (*Die Transformation der elliptischen Funktionen* 1868, 4. Abschn.), Thomae (*Theorie der komplexen Funktionen* 1870, Art. 11), Dedekind (in den *Erläuterungen zu Riemann's Werken*, 1876, S. 438), Kronecker (*Berliner Monatsberichte* vom 29. Juli und 28. Oktober 1880), Hurwitz (*Theorie der elliptischen Modulfunktionen, Math. Annalen* 1881, Bd. 18, S. 528), H. Weber (*Acta mathem.* 1885, Bd. , S. 340) und Molien [Tomsk] (*Leipziger Berichte* 1885, S. 25).

4) $k(u)\ l(g)\ k'(g)\ l'(u)$:

$$e^{\frac{lu^2i}{p}}\,\vartheta(u,q)=\gamma_2\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,\vartheta(u',q'),\qquad e^{\frac{lu^2i}{p}}\,\vartheta_1(u,q)=c_2\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,\vartheta_1(u',q'),$$

$$e^{\frac{lu^2i}{p}}\,\vartheta_2(u,q)=\alpha_2\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,\vartheta_2(u',q'),\qquad e^{\frac{lu^2i}{p}}\,\vartheta_3(u,q)=\beta_2\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,\vartheta_3(u',q').$$

5) $k(u)\ l(u)\ k'(g)\ l'(u)$:

$$e^{\frac{lu^2i}{p}}\,\vartheta(u,q)=\gamma_{12}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,\vartheta(u',q'),\qquad e^{\frac{lu^2i}{p}}\,\vartheta_1(u,q)=c_{12}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,\vartheta_1(u',q'),$$

$$e^{\frac{lu^2i}{p}}\,\vartheta_2(u,q)=\beta_{12}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,\vartheta_3(u',q'),\qquad e^{\frac{lu^2i}{p}}\,\vartheta_3(u,q)=\alpha_{12}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,\vartheta_2(u',q').$$

6) $k(u)\ l(u)\ k'(u)\ l'(g)$:

$$e^{\frac{lu^2i}{p}}\,\vartheta(u,q)=\gamma_{12}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,\vartheta_3(u',q'),\qquad e^{\frac{lu^2i}{p}}\,\vartheta_1(u,q)=c_{12}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,\vartheta_1(u',q'),$$

$$e^{\frac{lu^2i}{p}}\,\vartheta_2(u,q)=\beta_{12}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,\vartheta(u',q'),\qquad e^{\frac{lu^2i}{p}}\,\vartheta_3(u,q)=\alpha_{12}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,\vartheta_2(u',q').$$

Man kann bemerken, daß die Fälle 1), 3) und 5) einerseits, und 2), 4) und 6) andererseits, einfach durch Vertauschung von $\vartheta(u',q')$ und $\vartheta_3(u',q')$ auseinander hervorgehen, während die Doppelwerte in den Fällen 5) und 6) durch den Reziprozitätssatz miteinander verbunden sind. Die erhaltenen Formeln sind schließlich einfacher, als zu erwarten stand, und lassen sich, wenn man will, ohne Schwierigkeit umformen, indem man, wie bereits gezeigt, die eingehenden Symbole $\left(\frac{k}{l}\right)\left(\frac{l}{k}\right)$ durch andere mit ungeraden Nennern ersetzt. Zugleich erhält man für $u=0$, in den verschiedenen Fällen, analytische Ausdrücke für den Wert des zahlentheoretischen Symbols:

$$1)\qquad \left(\frac{k}{l}\right)=\sqrt{\frac{p}{\pi}}\,\omega^{l(l'-1)}\frac{\vartheta q}{\vartheta_2 q'}=\sqrt{\frac{p}{\pi}}\,\omega^{l(k-1)}\frac{\vartheta_2 q}{\vartheta_3 q'}=\sqrt{\frac{p}{\pi}}\,\omega^{-l}\frac{\vartheta_3 q}{\vartheta q'},$$

$$2)\qquad \left(\frac{k}{l}\right)=\sqrt{\frac{p}{\pi}}\,\omega^{l(l'-1)}\frac{\vartheta q}{\vartheta_2 q'}=\sqrt{\frac{p}{\pi}}\,\omega^{l(k-1)}\frac{\vartheta_2 q}{\vartheta q'}=\sqrt{\frac{p}{\pi}}\,\omega^{-l}\frac{\vartheta_3 q}{\vartheta_3 q'},$$

$$3)\qquad \varepsilon\left(\frac{l}{k}\right)=\sqrt{\frac{p}{\pi}}\,\omega^{-kl+k-1}\frac{\vartheta q}{\vartheta_3 q'}=\sqrt{\frac{p}{\pi}}\,\omega^{kk'+k-1}\frac{\vartheta_2 q}{\vartheta_2 q'}=\sqrt{\frac{p}{\pi}}\,\omega^{k-1}\frac{\vartheta_3 q}{\vartheta q'},$$

$$4)\qquad \varepsilon\left(\frac{l}{k}\right)=\sqrt{\frac{p}{\pi}}\,\omega^{-kl+k-1}\frac{\vartheta q}{\vartheta q'}=\sqrt{\frac{p}{\pi}}\,\omega^{kk'+k-1}\frac{\vartheta_2 q}{\vartheta_2 q'}=\sqrt{\frac{p}{\pi}}\,\omega^{k-1}\frac{\vartheta_3 q}{\vartheta_3 q'}\,,$$

$$5)\qquad \left(\frac{k}{l}\right)=\sqrt{\frac{p}{\pi}}\,\omega^{-l}\frac{\vartheta q}{\vartheta q'}=\sqrt{\frac{p}{\pi}}\,\omega^{l(k-1)}\frac{\vartheta_2 q}{\vartheta_3 q'}=\sqrt{\frac{p}{\pi}}\,\omega^{l(l'-1)}\frac{\vartheta_3 q}{\vartheta_2 q'}\,,$$

$$\varepsilon\left(\frac{l}{k}\right)=\sqrt{\frac{p}{\pi}}\,\omega^{-kl+k-1}\frac{\vartheta q}{\vartheta q'}=\sqrt{\frac{p}{\pi}}\,\omega^{k-1}\frac{\vartheta_2 q}{\vartheta_3 q'}=\sqrt{\frac{p}{\pi}}\,\omega^{kk'+k-1}\frac{\vartheta_3 q}{\vartheta_2 q'}\,,$$

$$6)\qquad \left(\frac{k}{l}\right)=\sqrt{\frac{p}{\pi}}\,\omega^{-l}\frac{\vartheta q}{\vartheta_3 q'}=\sqrt{\frac{p}{\pi}}\,\omega^{l(k-1)}\frac{\vartheta_2 q}{\vartheta q'}=\sqrt{\frac{p}{\pi}}\,\omega^{l(l'-1)}\frac{\vartheta_3 q}{\vartheta_2 q'}\,,$$

$$\varepsilon\left(\frac{l}{k}\right)=\sqrt{\frac{p}{\pi}}\,\omega^{-kl+k-1}\frac{\vartheta q}{\vartheta_3 q'}=\sqrt{\frac{p}{\pi}}\,\omega^{k-1}\frac{\vartheta_2 q}{\vartheta q'}=\sqrt{\frac{p}{\pi}}\,\omega^{kk'+k-1}\frac{\vartheta_3 q'}{\vartheta_2 q'}\,.$$

92.

Für $u=u'=0$ ergeben sich die entsprechenden Relationen für die *lineare Transformation der Modulfunktionen.* Neben den Werten

$$(k+l\mathfrak{h})\sqrt{(k+l\mathfrak{h})}\,\vartheta_1'(q)=c_{12}\vartheta_1'(q')\,,$$

$c=c_1$ für $l(u)$, $c=c_2$ für $k(u)$, erhält man zunächst in den Fällen 1), 3), 5):

$$\begin{array}{llll} & \text{1)} & \text{3)} & \text{5)} \\ \sqrt{k+l\mathfrak{h}}\;\vartheta(q) & =\alpha_1\vartheta_2(q') & =\gamma_2\vartheta_3(q') & =\gamma_{12}\vartheta(q')\,, \\ \sqrt{k+l\mathfrak{h}}\;\vartheta_2(q) & =\beta_1\vartheta_3(q') & =\alpha_2\vartheta_2(q') & =\beta_{12}\vartheta_3(q')\,, \\ \sqrt{k+l\mathfrak{h}}\;\vartheta_3(q) & =\gamma_1\vartheta(q') & =\beta_2\vartheta(q') & =\alpha_{12}\vartheta_2(q')\,, \end{array}$$

und wenn man $\vartheta(q')$ und $\vartheta_3(q')$ miteinander vertauscht, so ergeben sich die Fälle 2), 4), 6). Diese Ausdrücke stehen im Einklange mit der bekannten Gleichung

$$\vartheta_1'=\vartheta\,\vartheta_2\,\vartheta_3\,.$$

Durch Differentiation nach $h=\lg\frac{1}{q}$ folgt weiter:

$$\frac{\partial}{\partial h}\lg\vartheta_1'^{\,4}=\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}=\frac{\vartheta''}{\vartheta}+\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}+\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\,,$$

da allgemein

$$\vartheta_i''(u,\,q)=4\frac{\partial}{\partial h}\vartheta_i(u,\,q)\,.$$

Ein paar Bemerkungen mögen hier noch Platz finden. Während einerseits u und u' gleichzeitig verschwinden, sind andererseits für

$$f(\mathfrak{h}) = l\mathfrak{h}^2 + (k - l')\mathfrak{h} - k' = r^2 ,$$

$$f(\mathfrak{h}') = l\mathfrak{h}'^2 + (k - l')\mathfrak{h}' - k' = r'^2 ,$$

$$\left(\frac{u}{\pi}\right)^2 = \frac{p}{\pi}\,(\mathfrak{h} - \mathfrak{h}') = r^2 , \qquad \left(\frac{u'}{\pi}\right)^2 = \frac{\pi}{p}\,(\mathfrak{h} - \mathfrak{h}') = r'^2 , \qquad e^{\frac{l u^2 i}{p}} = \left(\frac{q}{q'}\right)^l ,$$

so daß die Gleichung

$$q^l \vartheta_1(r\pi,\ q) = c\sqrt{\frac{\pi}{p}}\, q'^l \vartheta_1(r'\pi,\ q')$$

als die Transformation einer Modulfunktion erscheint. Entsprechende Gleichungen ergeben sich natürlich für die koordinierten Thetafunktionen, also im Falle 5):

$$q^l \vartheta_3(r\pi,\ q) = \alpha\sqrt{\frac{\pi}{p}}\, q'^l \vartheta_2(r'\pi,\ q') ,$$

$$q^l \vartheta_2(r\pi,\ q) = \beta\sqrt{\frac{\pi}{p}}\, q'^l \vartheta_3(r'\pi,\ q') ,$$

$$q^l \vartheta(r\pi,\ q) = \gamma\sqrt{\frac{\pi}{p}}\, q'^l \vartheta(r'\pi,\ q') ,$$

und analog in den übrigen Fällen.

Schreibt man beispielshalber

$$\mathfrak{h}' = \frac{\mathfrak{h}}{1 + \mathfrak{h}} \qquad \text{oder} \qquad k = l = l' = 1 , \quad k' = 0 ,$$

so folgt

$$r^2 = \mathfrak{h}^2 , \qquad r'^2 = \mathfrak{h}'^2 , \qquad \frac{p}{\pi} = 1 + \mathfrak{h} , \qquad \frac{\pi}{p} = 1 - \mathfrak{h}' ,$$

$$\alpha = \beta = 1 , \qquad c = \gamma = \omega ,$$

mithin

$$\sqrt{1 + \mathfrak{h}}\; q\, \vartheta(\mathfrak{h}\pi,\ q) = \omega q' \vartheta(\mathfrak{h}'\pi,\ q') ,$$

$$\sqrt{1 + \mathfrak{h}}\; q\, \vartheta_1(\mathfrak{h}\pi,\ q) = \omega q' \vartheta_1(\mathfrak{h}'\pi,\ q') ,$$

$$\sqrt{1 + \mathfrak{h}}\; q\, \vartheta_2(\mathfrak{h}\pi,\ q) = q' \vartheta_3(\mathfrak{h}'\pi,\ q') ,$$

$$\sqrt{1 + \mathfrak{h}}\; q\, \vartheta_3(\mathfrak{h}\pi,\ q) = q' \vartheta_2(\mathfrak{h}'\pi,\ q') ,$$

oder

$$\sqrt{1+\mathfrak{h}}\,\Sigma(-1)^n q^{n^2} = \omega\,\Sigma(-1)^n q'^{n^2},$$

$$\sqrt{1+\mathfrak{h}}\,\Sigma(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} = \omega\,\Sigma(-1)^n q'^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2},$$

$$\sqrt{1+\mathfrak{h}}\,\Sigma q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} = \Sigma q'^{n^2},$$

$$\sqrt{1+\mathfrak{h}}\,\Sigma q^{n^2} = \Sigma q'^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Für $q = e^{-\pi}$ wird $q' = ie^{-\frac{\pi}{2}}$, $\quad \mathfrak{h} = i$, $\quad \mathfrak{h}' = \frac{1+i}{2} = \frac{\omega}{\sqrt{2}}$, usw.

Sei ferner l resp. $k \equiv 0 \bmod \mu$, so kann man

$$\mu\mathfrak{h}' = \frac{\mu k' + l'\mu\mathfrak{h}}{k + \frac{l}{\mu}\mu\mathfrak{h}} = \frac{k' + \mu l'\frac{\mathfrak{h}}{\mu}}{\frac{k}{\mu} + l\frac{\mathfrak{h}}{\mu}}$$

schreiben, und daraus schließen, daß q^μ in q'^μ übergeht, wenn man $\mu k'$ statt k' und $\frac{l}{\mu}$ statt l in die lineare Substitution einführt, wobei der Wert von $kl' - lk'$ unverändert bleibt. Analog wird für k' resp. $l' \equiv 0 \bmod \mu$:

$$\frac{1}{\mu}\mathfrak{h}' = \frac{\frac{k'}{\mu} + l'\frac{\mathfrak{h}}{\mu}}{k + \mu l\frac{\mathfrak{h}}{\mu}} = \frac{k' + \frac{l'}{\mu}\mu\mathfrak{h}}{\mu k + l\mu\mathfrak{h}},$$

d. h. ersetzt man k' durch $\frac{k'}{\mu}$ und l durch μl, so entsprechen sich $q^{\frac{1}{\mu}}$ und $q'^{\frac{1}{\mu}}$. Man kann also die Transformation einer Modulfunktion $\varphi(q^\mu)$ resp. $\varphi(q^{\frac{1}{\mu}})$ aus der Transformation von $\varphi(q)$ ableiten, wenn man l resp. k' durch einen Teiler μ dividiert und beziehungsweise multipliziert, so daß p und das Produkt lk' sich nicht ändern. So wird z. B. für

$$l = \mu l_1, \qquad c_1' = \left(\frac{k}{l_1}\right)\omega^{-l_1(k+l')+3l_1}, \qquad c_2' = \varepsilon\left(\frac{l_1}{k}\right)\omega^{k(l_1-\mu k')-3(k-1)},$$

$$e^{\frac{l_1 u^2 i}{p}}\,\vartheta_1(u, q^\mu) = c'\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,\vartheta_1(u', q'^\mu),$$

dagegen für $k' = \mu k_1'$:

$$c_1'' = \left(\frac{k}{\mu l}\right)\omega^{-\mu l(k+l')+3\mu l}, \qquad c_2'' = \varepsilon\left(\frac{\mu l}{k}\right)\omega^{k(\mu l-k_1')-3(k-1)},$$

$$e^{\frac{\mu l u^2 i}{p}}\,\vartheta_1(u, q^{\frac{1}{\mu}}) = c''\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,\vartheta_1(u', q'^{\frac{1}{\mu}}),$$

und entsprechend für die übrigen Thetafunktionen. Sind aber k oder l' durch μ teilbar, so kann man in ähnlicher Weise von $q^{\frac{1}{\mu}}$ zu q'^{μ}, oder umgekehrt von q^{μ} zu $q'^{\frac{1}{\mu}}$ übergehen, während p durch $\frac{p}{\mu}$, oder durch μp zu ersetzen ist.

93.

Für die komplementären Moduln $\varkappa$ und $\varkappa'$ des elliptischen Differentials und die zugehörigen sogenannten ganzen Integrale K und K' ergeben sich vermöge der Relationen

$$\varkappa = \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}, \quad \varkappa' = \frac{\vartheta^2}{\vartheta_3^2}, \quad \frac{2K}{\pi} = \vartheta_3^2, \quad K\mathfrak{h} = K'i,$$

die Transformationsgleichungen:

$$1) \quad \varkappa(q) = \omega^{-2kl} \frac{1}{\varkappa'(q')} = (-1)^{\frac{k}{2}} \frac{1}{\varkappa'(q')}, \qquad \varkappa'(q) = \omega^{-2ll'} \frac{\varkappa(q')}{\varkappa'(q')} = (-1)^{\frac{l+l'}{2}} i \frac{\varkappa(q')}{\varkappa'(q')},$$

$$2) \qquad = (-1)^{\frac{k}{2}} \varkappa'(q'), \qquad\qquad = (-1)^{\frac{l'}{2}} \varkappa(q'),$$

$$3) \qquad = (-1)^{\frac{k+k'}{2}} i \frac{\varkappa(q')}{\varkappa'(q')}, \qquad\qquad = (-1)^{\frac{l}{2}} \frac{1}{\varkappa'(q')},$$

$$4) \qquad = (-1)^{\frac{k'}{2}} \varkappa(q'), \qquad\qquad = (-1)^{\frac{l}{2}} \varkappa'(q'),$$

$$5) \qquad = (-1)^{\frac{k'}{2}} \frac{1}{\varkappa(q')}, \qquad\qquad = (-1)^{\frac{l+l'}{2}} \frac{1}{i} \frac{\varkappa'(q')}{\varkappa(q')},$$

$$6) \qquad = (-1)^{\frac{k+k'}{2}} \frac{1}{i} \frac{\varkappa'(q')}{\varkappa(q')}, \qquad\qquad = (-1)^{\frac{l'}{2}} \frac{1}{\varkappa(q')};$$

ferner:

$$1)\ 2) \quad (k+l\mathfrak{h})K(q) = \omega^{2l} \varkappa'(q')K(q') = (-1)^{\frac{l-1}{2}} i\varkappa'(q')K(q') = (-1)^{\frac{l-1}{2}} iK(q'),$$

$$3)\ 4) \qquad = \omega^{-2(k-1)} \varkappa'(q')K(q') = (-1)^{\frac{k-1}{2}} \varkappa'(q')K(q') = (-1)^{\frac{k-1}{2}} K(q'),$$

$$5)\ 6) \qquad = \omega^{-2l(l'-1)} \varkappa(q')K(q') = \omega^{-2kk'-2(k-1)} \varkappa(q')K(q'),$$

$$5) \qquad = (-1)^{\frac{l'-1}{2}} \varkappa(q')K(q') = (-1)^{\frac{k+k'-1}{2}} \varkappa(q')K(q'),$$

$$6) \qquad = (-1)^{\frac{l+l'-1}{2}} i\varkappa(q')K(q') = (-1)^{\frac{k'-1}{2}} \frac{1}{i} \varkappa(q')K(q').$$

Wenn endlich

$$(k+l\mathfrak{h})K(q) = kK + lK'i = f(q')K(q')$$

geschrieben wird, so erhält man wegen

$$K(q) = \frac{i}{\mathfrak{h}} K'(q), \qquad K(q') = \frac{i}{\mathfrak{h}'} K'(q'),$$

$$\frac{k+l\mathfrak{h}}{\mathfrak{h}} K'(q) = \frac{f(q')}{\mathfrak{h}'} K'(q'), \quad \text{oder} \quad \frac{k'+l'\mathfrak{h}}{\mathfrak{h}} K'(q) = f(q')K'(q').$$

Da für gleichzeitig verschwindende Werte von u und φ dem Differential

$$du = \frac{M\,d\varphi}{\sqrt{m^2\cos^2\varphi + n^2\sin^2\varphi}},$$

wo M das Gauß'sche Mittel aus m und n bezeichnet, die Gleichungen entsprechen:

$$\sin\varphi = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_1 u}{\vartheta u} = \frac{X_2'}{X_3'}\frac{Xu}{X_1 u},$$

$$\cos\varphi = \frac{\vartheta}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_2 u}{\vartheta u} = \frac{X_2'}{X'}\frac{Xu}{X_2 u},$$

$$\Delta\varphi = \frac{\vartheta}{\vartheta_3}\frac{\vartheta_3 u}{\vartheta u} = \frac{X_3'}{X'}\frac{Xu}{X_3 u},$$

so ist es auch nicht schwer, durch die lineare Transformation u, q, φ in u', q', φ' zu verwandeln. Man erhält dadurch die Gleichungen:

1) $$\sin\varphi = (-1)^{\frac{l-1}{2}} i\varkappa'(q')\,\mathrm{tg}\,\varphi', \qquad \cos\varphi = \frac{\Delta\varphi'}{\cos\varphi'}, \qquad \Delta\varphi = \frac{1}{\cos\varphi'},$$

2) $$\sin\varphi = (-1)^{\frac{l-1}{2}} i\,\mathrm{tg}\,\varphi', \qquad \cos\varphi = \frac{1}{\cos\varphi'}, \qquad \Delta\varphi = \frac{\Delta\varphi'}{\cos\varphi'},$$

3) $$\sin\varphi = (-1)^{\frac{k-1}{2}} \varkappa'(q')\frac{\sin\varphi'}{\Delta\varphi'}, \qquad \cos\varphi = \frac{\cos\varphi'}{\Delta\varphi'}, \qquad \Delta\varphi = \frac{1}{\Delta\varphi'},$$

4) $$\sin\varphi = (-1)^{\frac{k-1}{2}} \sin\varphi', \qquad \cos\varphi = \cos\varphi', \qquad \Delta\varphi = \Delta\varphi',$$

5) $$\sin\varphi = (-1)^{\frac{l'-1}{2}} \varkappa(q')\sin\varphi' = (-1)^{\frac{k+k'-1}{2}} \varkappa(q')\sin\varphi',$$
$$\cos\varphi = \Delta\varphi', \qquad \Delta\varphi = \cos\varphi',$$

6) $$\sin\varphi = (-1)^{\frac{l+l'-1}{2}} i\varkappa(q')\frac{\sin\varphi'}{\Delta\varphi'} = (-1)^{\frac{k'-1}{2}} \frac{1}{i}\varkappa(q')\frac{\sin\varphi'}{\Delta\varphi'},$$
$$\cos\varphi = \frac{1}{\Delta\varphi'}, \qquad \Delta\varphi = \frac{\cos\varphi'}{\Delta\varphi'}.$$

94.

Führt man jetzt die zweiten logarithmischen Differentialquotienten der Thetafunktionen

$$\eta_i u = \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^2 \log \vartheta_i u$$

als koordinierte doppelt-periodische Funktionen (mit den Perioden π und hi) ein, so genügen diese (*Math. Annalen*, Bd. 34, S. 502/6) den Differentialformeln

$$d\eta = -\vartheta_1'^3 \frac{\vartheta_1(2u)}{\vartheta^4 u} du, \qquad d\eta_1 = \vartheta_1'^3 \frac{\vartheta_1(2u)}{\vartheta_1^4 u} du,$$

$$d\eta_2 = -\vartheta_1'^3 \frac{\vartheta_1(2u)}{\vartheta_2^4 u} du, \qquad d\eta_3 = \vartheta_1'^3 \frac{\vartheta_1(2u)}{\vartheta_3^4 u} du,$$

$$(\eta_i' u)^2 = 4\left(\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \eta_i\right)\left(\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} - \eta_i\right)\left(\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - \eta_i\right) = \mathsf{H}^2,$$

oder für

$$\frac{1}{3}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} - \eta = p,$$

$$\mathsf{H}^2 = 4p^3 - g_2 p - g_3 \text{ [1]}$$

mit den Invarianten $g_2\, g_3$ des elliptischen Differentials du. Damit ergeben sich die einfach periodischen Integrale zweiter Gattung:

$$\frac{\vartheta_i' u}{\vartheta_i u} = \int \eta_i(u)\, du,$$

also

$$\frac{\vartheta' u}{\vartheta u} = \int_{\eta}^{\frac{\vartheta''}{\vartheta}} \frac{\eta\, d\eta}{\mathsf{H}} = -\int_{\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}}^{\eta} \frac{\eta\, d\eta}{\mathsf{H}}, \qquad \frac{\vartheta_1' u}{\vartheta_1 u} = -\int_{\eta_1}^{\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}} \frac{\eta\, d\eta}{\mathsf{H}},$$

$$\frac{\vartheta_2' u}{\vartheta_2 u} = \int_{\eta_2}^{\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}} \frac{\eta\, d\eta}{\mathsf{H}}, \qquad \frac{\vartheta_3' u}{\vartheta_3 u} = \int_{\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}}^{\eta_3} \frac{\eta\, d\eta}{\mathsf{H}} = -\int_{\eta_3}^{\frac{\vartheta''}{\vartheta}} \frac{\eta\, d\eta}{\mathsf{H}}.$$

Zugleich hat man

$$\eta_i'(u) = \sum_{kl} \frac{2}{(u + \pi w_i)^3},$$

wenn

$$w = k + \left(l + \frac{1}{2}\right)\mathfrak{h}, \qquad w_1 = k + l\mathfrak{h},$$

$$w_2 = k + \frac{1}{2} + l\mathfrak{h}, \qquad w_3 = \left(k + \frac{1}{2}\right) + \left(l + \frac{1}{2}\right)\mathfrak{h}$$

---

1) Dieser Ausdruck rührt von Eisenstein her, der in *Crelle's Journal* Bd. 35, S. 225 $(3, x) = \frac{1}{2}\eta_i'(x)$ und $(2, x) - (2^*, 0) = p(x)$ entwickelt. Siehe auch Hermite in *Crelle's Journal* Bd. 52, S. 8.

geschrieben, und die Summation auf alle positiven und negativen ganzen Zahlen k und l ausgedehnt wird. Die *Etafunktionen* entsprechen übrigens auch folgenden Reihenentwicklungen, deren resp. Konvergenzgebiete sich bis zu der dem Nullpunkte zunächst liegenden Wurzel der Gleichung $\vartheta_i u = 0$ erstrecken:

$$\eta u = \frac{\vartheta''}{\vartheta} - \vartheta_2^4 \vartheta_3^4 u^2 + \frac{1}{3} \vartheta_2^4 \vartheta_3^4 (\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4) u^4 \cdots,$$

$$\eta_1 u = -\frac{1}{u^2} + \frac{1}{3} \frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} - \frac{1}{20} g_2 u^2 - \frac{1}{28} g_3 u^4 \cdots,$$

$$\eta_2 u = \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} - \vartheta^4 \vartheta_3^4 u^2 - \frac{1}{3} \vartheta^4 \vartheta_3^4 (\vartheta^4 + \vartheta_3^4) u^4 \cdots,$$

$$\eta_3 u = \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} + \vartheta^4 \vartheta_2^4 u^2 + \frac{1}{3} \vartheta^4 \vartheta_2^4 (\vartheta_2^4 - \vartheta^4) u^4 \cdots,$$

$$g_2 = \frac{4}{3} (\vartheta_3^8 - \vartheta^4 \vartheta_2^4), \qquad g_3 = \frac{4}{27} (\vartheta^4 - \vartheta_2^4)(2\vartheta_3^8 + \vartheta^4 \vartheta_2^4).$$

Die lineare Transformation ergibt sogleich im Falle 1):

$$\eta(u) + \frac{2li}{p} = \left(\frac{\pi}{p}\right)^2 \eta_2(u'), \qquad \eta_1(u) + \frac{2li}{p} = \left(\frac{\pi}{p}\right)^2 \eta_1(u'),$$

$$\eta_2(u) + \frac{2li}{p} = \left(\frac{\pi}{p}\right)^2 \eta_3(u'), \qquad \eta_3(u) + \frac{2li}{p} = \left(\frac{\pi}{p}\right)^2 \eta(u'),$$

$$\eta'(u) = \left(\frac{\pi}{p}\right)^3 \eta_2'(u'), \qquad \eta_2'(u) = \left(\frac{\pi}{p}\right)^3 \eta_3'(u'), \qquad \eta_3'(u) = \left(\frac{\pi}{p}\right)^3 \eta'(u'),$$

und analog in den übrigen Fällen, während die Funktion

$$u^3 \eta_1'(u) = (u\vartheta_1')^3 \frac{\vartheta_1(2u)}{\vartheta_1^4(u)} = 2\left(1 - \frac{1}{20} g_2 u^4 - \frac{1}{14} g_3 u^6 \cdots\right)$$

in *allen* Fällen eine *Invariante* liefert beim Übergang zu $u'q'$.

Setzt man $u = 0$, so gehen die Gleichungen hervor:

$$\frac{\vartheta''}{\vartheta} + \frac{2li}{p} = \left(\frac{\pi}{p}\right)^2 \frac{\vartheta_2''(q')}{\vartheta_2(q')}, \qquad \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} + \frac{2li}{p} = \left(\frac{\pi}{p}\right)^2 \frac{\vartheta_3''(q')}{\vartheta_3(q')},$$

$$\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} + \frac{2li}{p} = \left(\frac{\pi}{p}\right)^2 \frac{\vartheta''(q')}{\vartheta(q')}, \qquad \frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} + \frac{6li}{p} = \left(\frac{\pi}{p}\right)^2 \frac{\vartheta_1'''(q')}{\vartheta_1'(q')},$$

von denen die letzte in allen 6 Fällen gilt. Für die elliptischen Invarianten g_2 und g_3 aber folgt ebenso

$$g_2(q) = \left(\frac{\pi}{p}\right)^4 g_2(q'), \qquad g_3(q) = \left(\frac{\pi}{p}\right)^6 g_3(q');$$

mithin auch

$$\Delta(q) = g_2^3 - 27 g_3^2 = \left(\frac{\pi}{p}\right)^{12} \Delta(q').$$

Hieraus erkennt man, daß die sogen. *absolute Invariante* des elliptischen Differentials

$$\varpi(q) = \frac{g_2^3}{\Delta} = \varpi(q')$$

durch die lineare Transformation ungeändert bleibt.

95.

Es ist vielleicht nicht ohne Interesse, auch die vier koordinierten *Zetafunktionen*

$$\zeta u = \frac{1}{\vartheta} e^{-\frac{1}{2}\frac{\vartheta''}{\vartheta}u^2} \vartheta u, \qquad \zeta_1 u = \frac{1}{u\vartheta_1'} e^{-\frac{1}{6}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}u^2} \vartheta_1 u,$$

$$\zeta_2 u = \frac{1}{\vartheta_2} e^{-\frac{1}{2}\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}u^2} \vartheta_2 u, \qquad \zeta_3 u = \frac{1}{\vartheta_3} e^{-\frac{1}{2}\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}u^2} \vartheta_3 u,$$

welche in *stetskonvergierende* Reihen von der Form

$$1 + \delta_2 u^4 + \delta_3 u^6 + \delta_4 u^8 \cdots$$

mit fehlendem zweiten Gliede entwickelt werden können, in Bezug auf ihr Verhalten zur linearen Transformation zu untersuchen. Eine leichte Rechnung zeigt, daß für unseren Fall 1) die einfachen Gleichungen gelten:

$$\zeta u = \zeta_2 u', \quad \zeta_1 u = \zeta_1 u', \quad \zeta_2 u = \zeta_3 u', \quad \zeta_3 u = \zeta u',$$

und die Funktion

$$\zeta_1(u, q) = \zeta_1(u', q')$$

darf in allen Fällen als *invariante Zetafunktion* bezeichnet werden.[1]) Bekanntlich kann man die Funktionen ζ durch das Weierstraß'sche Doppelprodukt definieren:

$$\zeta_1(u) = \prod_{kl} \left(1 - \frac{u}{\pi w_1}\right) e^{\frac{u}{\pi w_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{\pi w_1}\right)^2},$$

wo k und l alle positiven und negativen Zahlen durchlaufen sollen, und nur für $w_1 = k + l\mathfrak{h}$ der Wert $w_1 = 0$ auszuschließen ist. Weierstraß schreibt

$$\sigma u = u \prod_{kl} \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{w}\right)^2},$$

für

$$w = 2k\omega + 2l\omega' \quad \text{oder} \quad \mathfrak{h} = \frac{\omega'}{\omega}, \quad w = 2\omega w_1.$$

---

1) Im Falle 4) werden ζu, $\zeta_2 u$ und $\zeta_3 u$ invariant, dagegen bleibt ζu auch im Falle 5), $\zeta_2 u$ im Falle 3) und $\zeta_3 u$ im Falle 2) ungeändert.

In entsprechender Weise sollen noch die vier Kiepert'schen Funktionen

$$X_j(u) = \frac{1}{2}\chi_1(q)\frac{\vartheta_1(2u)}{\vartheta_j(u)}$$

transformiert werden, wo für

$$j = 1, \qquad u = 0, \qquad X_1(0) = \chi_1(q)$$

erhalten wird. Wir definieren diesen Faktor durch

$$\chi_1 = \prod_{p=1}^{\infty}(1-q^{2p}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n(3n+1)} \quad \text{oder} \quad q^{\frac{1}{12}}\chi_1 = \sum(-1)^n q^{3(n+\frac{1}{6})^2}.$$

Hierdurch gehen nach Bd. 102 des *Crelle'schen Journals*, S. 257 die Ausdrücke hervor:

$$(-1)^{\frac{j(j-1)}{2}} X_j(u,q) = \frac{1}{2i}q^{\frac{1}{4}}\{e^{2ui}\vartheta_j(3u+\mathfrak{h}\pi, q^3) - e^{-2ui}\vartheta_j(3u-\mathfrak{h}\pi, q^3)\},$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}q^{-\frac{1}{12}}\{\vartheta_j(u+\frac{\pi}{3}, q^{\frac{1}{3}}) - \vartheta_j(u-\frac{\pi}{3}, q^{\frac{1}{3}})\},$$

und für $u = 0$

$$\chi_1(q) = \omega^{\mathfrak{h}-2}\vartheta_1(\mathfrak{h}\pi, q^3) = \frac{1}{\sqrt{3}}\omega^{-\frac{1}{3}\mathfrak{h}}\vartheta_1(\frac{\pi}{3}, q^{\frac{1}{3}}).$$

Man erkennt, daß die durch den Übergang von $q = e^{\mathfrak{h}\pi i}$ zu $q' = e^{\mathfrak{h}'\pi i}$ vermittelten Transformationen der beiden Thetafunktionen jetzt nicht mehr von der ersten, sondern von der dritten Ordnung werden, da q durch q^3 resp. $q^{\frac{1}{3}}$ ersetzt worden ist, und die Ausdrücke $\frac{k'+3l'\mathfrak{h}}{k+3l\mathfrak{h}}$ resp. $\frac{3k'+l'\mathfrak{h}}{3k+l\mathfrak{h}}$ einer Verdreifachung von l und l', resp. von k und k' entsprechen. Da ferner

$$\vartheta_1'(q) = 2q^{\frac{1}{4}}\chi_1^3 = c\left(\frac{\pi}{p}\right)^{\frac{3}{2}}\vartheta_1'(q') = c\left(\frac{\pi}{p}\right)^{\frac{3}{2}}2q'^{\frac{1}{4}}\chi_1^3(q'),$$

so folgt durch Ausziehung der dritten Wurzel:

$$\sqrt{\frac{p}{\pi}}\,q^{\frac{1}{12}}\chi_1(q) = C q'^{\frac{1}{12}}\chi_1(q'), \qquad C^3 = c,$$

wo im Werte von C eine dritte Einheitswurzel als Faktor zu bestimmen bleibt.

96.

Vermöge der Definitionsgleichung für $X_j(u)$ erhält man zunächst für

$$X_1(u,q) = \sum(-1)^n q^{n(3n+1)}\cos(6n+1)u,$$

oder

$$q^{\frac{1}{12}} X_1(u, q) = \sum (-1)^n q^{\left(3n+\frac{1}{6}\right)^2} \cos(6n+1)u,$$

$$\sqrt{\frac{p}{\pi}}\, e^{\frac{3lu^2i}{p}} q^{\frac{1}{12}} X_1(u, q) = C q'^{\frac{1}{12}} X_1(u', q').$$

Die übrigen Funktionen $X_j(u)$ werden gleich den entsprechenden Thetafunktionen durch die lineare Transformation in den Fällen 1) bis 6) gegenseitig ineinander übergeführt. So erhält man in den Fällen 1), 3) und 5) für

$$X(u) = \sum (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{3}\right)\left(3n+\frac{1}{3}\right)} \sin(6n+2)u,$$

oder

$$q^{\frac{1}{12}} X(u) = \sum (-1)^n q^{3\left(n+\frac{1}{3}\right)^2} \sin(6n+2)u:$$

$$\sqrt{\frac{p}{\pi}}\, e^{\frac{3lu^2i}{p}} q^{\frac{1}{12}} X(u, q) = C\varpi^{-l(k-2)} q'^{\frac{1}{12}} X_2(u', q'),$$

$$= C\varpi^{-kk'-2(k-1)} q'^{\frac{1}{12}} X_3(u', q'),$$

$$= C\cdot\varpi^{-l(k+l'-2)} \text{ oder } \varpi^{-kk'-2(k-1)} q'^{\frac{1}{12}} X(u', q');$$

für

$$X_2(u) = \sum q^{n(3n+1)} \sin(6n+1)u,$$

oder

$$q^{\frac{1}{12}} X_2(u) = \sum q^{3\left(n+\frac{1}{6}\right)^2} \sin(6n+1)u:$$

$$\sqrt{\frac{p}{\pi}}\, e^{\frac{3lu^2i}{p}} q^{\frac{1}{12}} X_2(u, q) = C\varpi^{-l(l'-2)} q'^{\frac{1}{12}} X_3(u', q'),$$

$$= C\varpi^{kl-2(k-1)} q'^{\frac{1}{12}} X_2(u', q'),$$

$$= C\cdot\varpi^{-l(l'-2)} \text{ oder } \varpi^{k(l-k')-2(k-1)} q'^{\frac{1}{12}} X_3(u', q');$$

endlich für

$$X_3(u) = \sum q^{\left(n+\frac{1}{3}\right)\left(3n+\frac{1}{3}\right)} \sin(6n+2)u,$$

oder

$$q^{\frac{1}{12}} X_3(u) = \sum q^{3\left(n+\frac{1}{3}\right)^2} \sin(6n+2)u:$$

$$\sqrt{\frac{p}{\pi}}\, e^{\frac{3 l u^2 i}{p}}\, q^{\frac{1}{12}} X_3(u, q) = C\omega^{-l(k+l'-2)} q'^{\frac{1}{12}} X(u', q'),$$

$$= C\omega^{k(l-k')-2(k-1)} q'^{\frac{1}{12}} X(u', q'),$$

$$= C\cdot\omega^{-l(k-2)} \text{ oder } \omega^{kl-2(k-1)} q'^{\frac{1}{12}} X_2(u', q').$$

Die Fälle 2), 4), 6) ergeben sich durch Vertauschung von $X(u', q')$ und $X_3(u', q')$.

Da die Funktionen X, X_2, X_3 für $u = 0$ verschwinden, so untersuchen wir noch ihre Differentialquotienten, welche für 1), 3), 5) und $u = 0$ liefern:

$$\frac{p}{\pi}\sqrt{\frac{p}{\pi}}\, q^{\frac{1}{12}} X'(0, q) = C\omega^{-l(k-2)} q'^{\frac{1}{12}} X_2'(0, q'),$$

$$= C\omega^{-kk'-2(k-1)} q'^{\frac{1}{12}} X_3'(0, q'),$$

$$= C\cdot\omega^{-l(k+l'-2)} \text{ oder } \omega^{-kk'-2(k-1)} q'^{\frac{1}{12}} X'(0, q');$$

$$\frac{p}{\pi}\sqrt{\frac{p}{\pi}}\, q^{\frac{1}{12}} X_2'(0, q) = C\omega^{-l(l'-2)} q'^{\frac{1}{12}} X_3'(0, q'),$$

$$= C\omega^{kl-2(k-1)} q'^{\frac{1}{12}} X_2'(0, q'),$$

$$= C\cdot\omega^{-l(l'-2)} \text{ oder } \omega^{k(l-k')-2(k-1)} q'^{\frac{1}{12}} X_3'(0, q');$$

$$\frac{p}{\pi}\sqrt{\frac{p}{\pi}}\, q^{\frac{1}{12}} X_3'(0, q) = C\omega^{-l(k+l'-2)} q'^{\frac{1}{12}} X'(0, q'),$$

$$= C\omega^{k(l-k')-2(k-1)} q'^{\frac{1}{12}} X'(0, q'),$$

$$= C\cdot\omega^{-l(k-2)} \text{ oder } \omega^{kl-2(k-1)} q'^{\frac{1}{12}} X_2'(0, q').$$

Durch Vertauschung von $X'(q')$ und $X_3'(q')$ erhält man die Fälle 2), 4), 6), während die Gleichungen gelten:

$$\vartheta X' = \vartheta_2 X_2' = \vartheta_3 X_3' = 2 q^{\frac{1}{4}} \chi_1^4$$

oder

$$\chi^2 X' = 2 q^{\frac{1}{4}} \chi_2^2 X_2' = \chi_3^2 X_3' = 2 q^{\frac{1}{4}} \chi_1^3,$$

auch findet man leicht für abnehmende Werte von p und q':

$$\lim X_1(q') = X_2'(q') = 1 \qquad \text{und} \qquad \lim X'(q') = X_3'(q') = 2 q'^{\frac{1}{4}}.$$

97.

Schreibt man $\psi = e^{\frac{\pi i}{8}}$, so nimmt nach dem Früheren der Faktor $C = \sqrt[8]{c}$ die Werte an:

$$\text{für } l(u) \quad C_1 = \psi^{2m} \omega^{-\frac{1}{8}l(k+l')+l} \left(\frac{k}{l}\right),$$

$$\text{für } k(u) \quad C_2 = \psi^{2m'} \omega^{\frac{1}{8}k(l-k')-(k-1)} \varepsilon \left(\frac{l}{k}\right).$$

Die Bestimmung der Exponenten m und m' ist namentlich von **Hermite**, **Dedekind**, **Weber** und **Molien** geleistet worden, und zwar hat man dabei die Fälle zu unterscheiden, in denen $l(u)$ oder $k(u)$ durch 3 teilbar sind. Man erhält für

$$l \equiv \pm 1 \quad \text{resp.} \quad k \equiv \pm 1 \bmod 6\,, \qquad m = 0 \quad \text{resp.} \quad m' = 0\,,$$

während für

$$l \equiv 3 \bmod 6\,, \qquad m = kk'\,,$$

und für

$$k \equiv 3\,, \qquad m' = ll'$$

zu setzen ist.

Auch kann man die betrachteten Fälle zusammenziehen, wenn man

$$m = kk'(1 - l^2) \qquad \text{resp.} \qquad m' = ll'(1 - k^2)$$

oder

$$\psi^{2m} = \omega^{\frac{1}{8}kk'(l^2-1)} \qquad \text{und} \qquad \psi^{2m'} = \omega^{\frac{1}{8}ll'(k^2-1)}$$

schreibt, wo $l^2 - 1$ resp. $k^2 - 1$ durch 8 teilbar werden.

Wenn k und l *gleichzeitig* ungerade sind, so können die eingehenden Potenzen von ψ und ω in den beiden Werten von C nur durch den Faktor $\omega^{(k-1)(l-1)}$ des Reziprozitätssatzes unterschieden sein. In der Tat wird in den Fällen 5) und 6), wie leicht direkt zu verifizieren:

$$(k-1)(l-1) = \frac{1}{3} k(l-k') - k + 1 + \\ + \frac{1}{3} ll'(k^2-1) + \frac{1}{3} l(k+l') - l - \frac{1}{3} kk'(l^2-1)\,.$$

Wir versuchen C durch Anwendung der nämlichen Methode zu berechnen, wie den Faktor c in der Transformationsgleichung der Thetafunktionen. Schreibt man wiederum

$$p = \sigma\pi i\,, \qquad u = u'\sigma i\,,$$

$$q = e^{-\frac{\pi\sigma}{l} - \frac{k\pi i}{l}}\,, \qquad q' = e^{-\frac{\pi}{l\sigma} + \frac{l'\pi i}{l}}\,,$$

wo l und σ mit gleichen Vorzeichen zu nehmen sind, so sollen in der Gleichung

$$\sqrt{\sigma i}\sum(-1)^n q^{3\left(n+\frac{1}{6}\right)^2} = C q'^{\frac{1}{12}} \chi_1(q')$$

σ und q' mit p zur Null konvergieren. Da hierbei $\chi_1(q')$ sich der Einheit nähert, so wird

$$C = \lim_{\sigma=0} \sqrt{\sigma i}\, q'^{-\frac{1}{12}} \sum_n (-1)^n q^{3\left(n+\frac{1}{6}\right)^2}.$$

98.

Zur Ableitung dieses Grenzwertes gehen wir zunächst aus von der allgemeinen Gleichung für die Funktion $X_1(u, q)$:

$$\sqrt{\frac{p}{\pi}}\, q^{\frac{1}{12}} X_1(u, q) = C e^{-\frac{3 l u^2 i}{p}} q'^{\frac{1}{12}} X_1(u', q'),$$

welche für

$$u = \frac{\pi}{6l}, \quad \text{also} \quad u' = \frac{\pi}{6l\sigma i}$$

ergibt:

$$\sqrt{\sigma i}\, q^{\frac{1}{12}} X_1\left(\frac{\pi}{6l}, q\right) = C e^{-\frac{\pi}{12 l \sigma}} q'^{\frac{1}{12}} X_1\left(\frac{\pi i}{6l\sigma}, q'\right).$$

Nun folgt aber aus

$$X_1(u, q) = \sum(-1)^n q^{n(3n+1)} \cos(6n+1)u,$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \sum(-1)^n \sin(2n+1)\frac{\pi}{3}\, q^{\frac{1}{3}n(n+1)} e^{\pm(2n+1)ui},$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \sum(-1)^n \sin(2n+1)\frac{\pi}{3}\, q^{\frac{1}{3}n(n+1)} \cos(2n+1)u:$$

$$q^{\frac{1}{12}} X_1\left(\frac{\pi}{6l}, q\right) = \sum(-1)^n q^{3\left(n+\frac{1}{6}\right)^2} \cos\left(n+\frac{1}{6}\right)\frac{\pi}{l},$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \sum(-1)^n \sin(2n+1)\frac{\pi}{3}\, q^{\frac{1}{3}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{3l},$$

$$q'^{\frac{1}{12}} X_1\left(\frac{\pi i}{6l\sigma}, q'\right) = \sum(-1)^n q'^{3\left(n+\frac{1}{6}\right)^2} \cos\left(n+\frac{1}{6}\right)\frac{\pi i}{l\sigma},$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \sum(-1)^n \sin(2n+1)\frac{\pi}{3}\, q'^{\frac{1}{3}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{\frac{1}{3}\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{l\sigma}}.$$

Für abnehmende Werte von σ und q' ergibt sich leicht aus beiden Ausdrücken

$$\lim e^{-\frac{\pi}{12 l \sigma}} q'^{\frac{1}{12}} X_1\left(\frac{\pi i}{6 l \sigma}, q'\right) = \frac{1}{2} e^{\frac{l' \pi i}{12 l}},$$

während für $n = l\mu + \lambda$, wo λ ein Restensystem modulo l, und μ nebst n alle Zahlen zwischen $\pm\infty$ durchlaufen:

$$\lim_{\sigma=0} \sqrt{\sigma i}\, q^{\frac{1}{12}} X_1\left(\frac{\pi}{6 l}, q\right) = \overset{\bmod l}{\underset{\lambda}{\mathrm{S}}} (-1)^{\lambda} L e^{-\frac{3 k \pi i}{l}\left(\lambda + \frac{1}{6}\right)^2} \cos\left(\lambda + \frac{1}{6}\right)\frac{\pi}{l},$$

$$L = \lim \sqrt{\sigma i} \sum_{\mu} e^{-3 l \sigma \pi \left(\mu + \frac{6\lambda + 1}{6 l}\right)^2}$$

wird, weil $\quad (-1)^{\mu(k-1)(l-1)} = 1 \quad$ ist.

Dagegen geht aus dem zweiten Ausdruck, wenn man $n = 3 l \mu + \lambda$ setzt, der Grenzwert hervor:

$$\lim \sqrt{\sigma i}\, q^{\frac{1}{12}} X_1\left(\frac{\pi}{6 l}, q\right) = \overset{\bmod 3 l}{\underset{\lambda}{\mathrm{S}}} (-1)^{\lambda} L e^{-\frac{k \pi i}{3 l}\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2} \sin(2\lambda + 1)\frac{\pi}{3} \cos\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{3 l},$$

$$L = \lim \sqrt{\frac{\sigma i}{3}} \sum_{\mu} e^{-3 l \sigma \pi \left(\mu + \frac{2\lambda + 1}{6 l}\right)^2}.$$

Schreibt man hier

$$3 l \sigma = \xi^2, \qquad \left(\lambda + \frac{1}{6}\right)\frac{\xi}{l} = \nu \quad \text{resp.} \quad \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\frac{\xi}{3 l} = \nu,$$

$$\lim_{\xi=0} \sum_{\mu} \xi e^{-\pi(\mu\xi + \nu)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1,$$

so erhält man

$$L = \sqrt{\frac{i}{3 l}} \quad \text{resp.} \quad = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{i}{l}},$$

und damit:

$$C = \sqrt{\frac{i}{3 l}}\, e^{-\frac{l' \pi i}{12 l}} \overset{\bmod l}{\underset{\lambda}{\mathrm{S}}} (-1)^{\lambda} e^{-\frac{3 k \pi i}{l}\left(\lambda + \frac{1}{6}\right)^2} 2 \cos\left(\lambda + \frac{1}{6}\right)\frac{\pi}{l},$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{i}{l}}\, e^{-\frac{l' \pi i}{12 l}} \overset{\bmod 3 l}{\underset{\lambda}{\mathrm{S}}} (-1)^{\lambda} e^{-\frac{k \pi i}{3 l}\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2} 2 \sin(2\lambda + 1)\frac{\pi}{3} \cos\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{3 l}.$$

Die Gleichheit beider Werte läßt sich ohne Mühe direkt verifizieren. Die Theorie der Gauß'schen Summen gestattet alsdann die weitere Reduktion der abgeleiteten Ausdrücke, deren Resultat bereits im Art. 10 angeführt worden ist.

99.

Schon Kronecker hat in den *Berliner Monatsberichten* von 1880 (S. 686 und 854) hervorgehoben, daß die von Cauchy herrührende *Methode der reziproken Funktionen* (*Bull. soc. philom.* 1817, S. 121 und *Liouville's Journal* 1840, S. 154) zur Ableitung der bei der linearen Transformation der Thetafunktionen auftretenden Grenzwerte besonders geeignet sei.

Cauchy und Poisson haben zuerst auf die Reziprozität der Gleichungen

$$fx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi t \, e^{xti} dt \quad \text{und} \quad \varphi t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} fx \, e^{-xti} dx$$

aufmerksam gemacht, welche für $xt = 2\pi$ zu den Summenausdrücken führen:

$$\sqrt{x} \sum_{-\infty}^{\infty} f(nx) = \sqrt{t} \sum \varphi(nt),$$

$$\sqrt{x} \sum (-1)^n f(\overline{n + \tfrac{1}{2}}\, x) = \sqrt{t} \sum (-1)^n \varphi(\overline{n + \tfrac{1}{2}}\, t)$$

und

$$\sqrt{x} \sum (-1)^n f(nx) = \sqrt{t} \sum \varphi(\overline{n + \tfrac{1}{2}}\, t),$$

wenn man in der Formel

$$\sum_{-m}^{m} f(nx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi t \, \frac{\sin (m + \frac{1}{2}) xt}{\sin \frac{1}{2} xt} \, dt$$

m über alle Grenzen wachsen läßt. Die Anwendbarkeit auf die Transformation der elliptischen Funktionen ist von sehr allgemeinem Charakter.

Schreibt man

$$fx = e^{-(\frac{1}{2} r x^2 + s x)}, \qquad \varphi t = \frac{1}{\sqrt{r}} e^{-\frac{1}{2r}(t - si)^2},$$ [1])

wo r und $\frac{1}{\sqrt{r}}$ positive reelle Teile haben sollen, so erhält man:

$$\sqrt{x} \sum_{\mu} e^{-\mu x (\frac{1}{2} r \mu x + s)} = \sqrt{\frac{t}{r}} \sum_{\mu} e^{-\frac{1}{2r}(\overline{\mu + \frac{1}{2}}\, t - si)^2}, \qquad tx = 2\pi,$$

Vergleicht man damit den Ausdruck

$$\chi_1(q) = \sum (-1)^n q^{n(3n+1)}, \qquad q = e^{-\frac{\pi}{l}(\sigma + ki)},$$

1) Vgl. z. B. meine Gratulationsschrift *über unendliche Reihen* Art. 40, 1860.

und setzt $n = l\mu + \lambda$, wo λ ein Restensystem mod l durchlaufen soll, so wird

$$\chi_1(q) = \overset{\mathrm{mod}\, l}{\underset{\lambda}{\mathrm{S}}} (-1)^{\lambda} q^{\lambda(3\lambda+1)} \sum_{\mu} (-1)^{\mu} e^{-(3l\mu+6\lambda+1)\mu\sigma\pi}.$$

Die Transformation von $\sum\limits_{\mu}$ liefert für

$$x = \sqrt{l\sigma}, \qquad t = \frac{2\pi}{\sqrt{l\sigma}}, \qquad r = 6\pi, \qquad s = (6\lambda+1)\pi\sqrt{\frac{\sigma}{l}}:$$

$$\sum_{\mu} = \frac{1}{\sqrt{3l\sigma}} \sum_{\mu} e^{-\frac{\pi}{12l\sigma}(2\mu+1-\overline{6\lambda+1}\,\sigma i)^2},$$

und damit

$$\chi_1(q) = \frac{1}{\sqrt{3l\sigma}} e^{\left(\sigma-\frac{1}{\sigma}\right)\frac{\pi}{12l}} \overset{l}{\underset{\lambda}{\mathrm{S}}} (-1)^{\lambda} e^{-\lambda(3\lambda+1)\frac{k\pi i}{l}} \sum_{\mu} e^{-\mu(\mu+1)\frac{\pi}{3l\sigma}+\left(\lambda+\frac{1}{6}\right)(2\mu+1)\frac{\pi i}{l}}.$$

Läßt man hier σ unendlich abnehmen, so folgt wegen $l\sigma > 0$, unter Berücksichtigung der beiden Werte $\mu = 0$ und $\mu = -1$:

$$\lim_{\sigma=0} \sqrt{\sigma i}\, e^{\frac{\pi}{12l\sigma}} \chi_1(q) = \sqrt{\frac{i}{3l}} \overset{l}{\underset{\lambda}{\mathrm{S}}} (-1)^{\lambda} e^{-\lambda(3\lambda+1)\frac{k\pi i}{l}}\, 2\cos\left(\lambda+\frac{1}{6}\right)\frac{\pi}{l},$$

oder

$$C = \sqrt{\frac{i}{3l}}\, e^{-\frac{(k+l')\pi i}{12l}} \overset{\mathrm{mod}\, l}{\underset{\lambda}{\mathrm{S}}} (-1)^{\lambda} e^{-\lambda(3\lambda+1)\frac{k\pi i}{l}}\, 2\cos\left(\lambda+\frac{1}{6}\right)\frac{\pi}{l},$$

in völliger Übereinstimmung mit dem Resultate des vorigen Artikels. Die nämliche Methode führt zur Transformation der für die Produkte χ, χ_2, χ_3, resp. die Funktionen χ_1 und φ des Art. 104 geltenden Ausdrücke.

100.

Die numerische Berechnung der vier Produkte

$$\chi = \prod_{p=1}^{\infty}(1-q^{2p-1}) = 2^{\frac{1}{6}} q^{\frac{1}{24}} \varkappa'^{\frac{1}{4}} (\varkappa\varkappa')^{-\frac{1}{12}},$$

$$\chi_1 = \prod(1-q^{2p}) = 2^{-\frac{1}{3}} q^{-\frac{1}{12}} \left(\frac{2K}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} (\varkappa\varkappa')^{\frac{1}{6}},$$

$$\chi_2 = \prod(1+q^{2p}) = 2^{-\frac{1}{3}} q^{-\frac{1}{12}} \varkappa^{\frac{1}{4}} (\varkappa\varkappa')^{-\frac{1}{12}},$$

$$\chi_3 = \prod(1+q^{2p-1}) = 2^{\frac{1}{6}} q^{\frac{1}{24}} (\varkappa\varkappa')^{-\frac{1}{12}},$$

aus dem elliptischen Differential

$$du = \frac{M\,d\varphi}{\sqrt{m^2\cos^2\varphi + n^2\sin^2\varphi}}\,, \qquad \frac{n}{m} = \varkappa'\,, \qquad \frac{n'}{m} = \varkappa\,,$$

kann nach bekannter Beziehung (S. 99) durch die Formeln geschehen:

$$\mathfrak{l} = \lg\frac{m}{n}\,, \qquad \mathfrak{l}_1 = \lg\left(1 + \frac{n}{m}\right) + \frac{1}{2}\mathfrak{l} - \lg 2 = \lg\frac{m_1}{n_1}\,,$$

$$\mathfrak{l}_2 = \lg\left(1 + \frac{n_1}{m_1}\right) + \frac{1}{2}\mathfrak{l}_1 - \lg 2 = \lg\frac{m_2}{n_2}\,, \quad \text{usw.}$$

$$\lg q = 2\lg\frac{n'}{4m} + \mathfrak{l} - \frac{3}{2}\left(\mathfrak{l}_1 + \frac{1}{2}\mathfrak{l}_2 + \frac{1}{4}\mathfrak{l}_3 + \frac{1}{8}\mathfrak{l}_4 \ldots\right),$$

$$8\lg\chi_1 = -\left(\mathfrak{l}_1 + \frac{3}{2}\mathfrak{l}_2 + \frac{7}{4}\mathfrak{l}_3 + \frac{15}{8}\mathfrak{l}_4 \ldots\right),$$

$$8\lg\chi = -\left(\mathfrak{l} + \frac{1}{2}\mathfrak{l}_1 + \frac{1}{4}\mathfrak{l}_2 + \frac{1}{8}\mathfrak{l}_3 \ldots\right),$$

$$8\lg\chi_2 = \mathfrak{l}_1 + \frac{1}{2}\mathfrak{l}_2 + \frac{1}{4}\mathfrak{l}_3 + \frac{1}{8}\mathfrak{l}_4 \ldots,$$

$$8\lg\chi_3 = \mathfrak{l} - \frac{1}{2}\mathfrak{l}_1 - \frac{1}{4}\mathfrak{l}_2 - \frac{1}{8}\mathfrak{l}_3 \ldots.$$

Wir lassen hier einige Relationen folgen, denen die Funktionen χ_i genügen.[1] Zunächst hat man

$$\chi_2 = \frac{1}{\chi(q^2)}\,, \qquad \chi_3 = \chi(-q)\,, \qquad 1 = \chi\chi_2\chi_3 = \chi\chi_2(q^{\frac{1}{2}}) = \chi_2\chi(q^2) = \chi_3\chi_2(iq^{\frac{1}{2}})\,,$$

oder

$$\chi_2\chi_3 = \chi_2(q^{\frac{1}{2}})\,, \qquad \chi\chi_3 = \chi(q^2)\,, \qquad \chi\chi_2 = \chi_3(iq^{\frac{1}{2}})\,;$$

ferner wird

$$\chi_1\chi = \chi_1(q^{\frac{1}{2}})\,, \qquad \chi_1\chi_2 = \chi_1(q^2)\,, \qquad \chi_1\chi_3 = \chi_1(iq^{\frac{1}{2}})\,,$$

$$\chi_1\chi^2 = \chi\chi_1(q^{\frac{1}{2}}) = \vartheta = \sum(-1)^n q^{n^2}\,,$$

$$q^{\frac{1}{4}}\chi_1\chi_2^2 = q^{\frac{1}{4}}\chi_2\chi_1(q^2) = \frac{1}{2}\vartheta_2 = \frac{1}{2}\sum q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} = \sum q^{4\left(n+\frac{1}{4}\right)^2}\,,$$

$$\chi_1\chi_3^2 = \chi_3\chi_1(iq^{\frac{1}{2}}) = \vartheta_3 = \sum q^{n^2}\,,$$

1) Vgl. die *Leipziger Berichte* vom 12. Dezember 1862, wo sich $\chi_2\chi_3\chi_4$ an Stelle von $\chi\chi_2\chi_3$ geschrieben findet.

und wenn man der Bequemlichkeit halber $\vartheta_2 = 2\,q^{\frac{1}{4}}\,\theta_2$ setzt:

$$q^{\frac{1}{8}}\,\frac{\chi_1}{\chi} = q^{\frac{1}{8}}\,\theta_2(q^{\frac{1}{2}}) = \sum q^{2(n+\frac{1}{4})^2}, \qquad \frac{\chi_1}{\chi_2} = \vartheta(q^2) = \sum (-1)^n q^{2n^2},$$

$$q^{\frac{1}{8}}\,\frac{\chi_1}{\chi_3} = q^{\frac{1}{8}}\,\theta_2(iq^{\frac{1}{2}}) = \sum (-1)^n q^{2(n+\frac{1}{4})^2},$$

$$q^{\frac{1}{12}}\,\chi_1 = \sum (-1)^n q^{3(n+\frac{1}{6})^2}, \qquad q^{\frac{1}{4}}\,\chi_1^3 = \frac{1}{2}\,\vartheta_1' = \sum (-1)^n (n+\frac{1}{2})\,q^{(n+\frac{1}{2})^2},$$

wofür man auch schreiben kann:

$$q^{\frac{1}{4}}\,\chi_1^3 = \sum (-1)^n n\,q^{(n+\frac{1}{2})^2} = \sum (4n+1)\,q^{4(n+\frac{1}{4})^2} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (2m+1)\,q^{(m+\frac{1}{2})^2}.$$

Weiter folgt

$$q^{\frac{1}{9}}\,\chi(q^{\frac{1}{3}})\,\theta_2(q^{\frac{1}{2}}) = \sum (-1)^n q^{(n+\frac{1}{3})^2},$$

$$q^{\frac{1}{36}}\,\chi_2(q^{\frac{1}{3}})\,\vartheta(q^3) = \sum q^{(n+\frac{1}{6})^2}, \qquad q^{\frac{1}{9}}\,\chi_3(q^{\frac{1}{3}})\,\theta_2(iq^{\frac{1}{2}}) = \sum q^{(n+\frac{1}{3})^2}.$$

Hiernach ergeben sich leicht die Ausdrücke

$$\chi = \sqrt{\frac{\vartheta}{\chi_1}} = \sqrt{\frac{\chi_1(q^{\frac{1}{2}})}{\theta_2(q^{\frac{1}{2}})}} = \sqrt[3]{\frac{\vartheta}{\theta_2(q^{\frac{1}{2}})}} = \frac{\vartheta}{\chi_1(q^{\frac{1}{2}})} = \frac{\chi_1(q^{\frac{1}{2}})}{\chi_1} = \frac{\chi_1}{\theta_2(q^{\frac{1}{2}})},$$

$$\chi_2 = \sqrt{\frac{\theta_2}{\chi_1}} = \sqrt{\frac{\chi_1(q^2)}{\vartheta(q^2)}} = \sqrt[3]{\frac{\theta_2}{\vartheta(q^2)}} = \frac{\theta_2}{\chi_1(q^2)} = \frac{\chi_1(q^2)}{\chi_1} = \frac{\chi_1}{\vartheta(q^2)},$$

$$\chi_3 = \sqrt{\frac{\vartheta_3}{\chi_1}} = \sqrt{\frac{\chi_1(iq^{\frac{1}{2}})}{\theta_2(iq^{\frac{1}{2}})}} = \sqrt[3]{\frac{\vartheta_3}{\theta_2(iq^{\frac{1}{2}})}} = \frac{\vartheta_3}{\chi_1(iq^{\frac{1}{2}})} = \frac{\chi_1(iq^{\frac{1}{2}})}{\chi_1} = \frac{\chi_1}{\theta_2(iq^{\frac{1}{2}})}.$$

Von weiteren analogen Formeln führen wir nur noch die folgenden an:

$$\chi = \frac{\vartheta(q^2)}{\chi_1(iq^{\frac{1}{2}})} = \frac{\theta_2(iq^{\frac{1}{2}})}{\chi_1(q^2)} = \frac{\chi_1(q^{\frac{1}{4}})}{\theta_2(iq^{\frac{1}{4}})} = \frac{\chi_1(iq^{\frac{1}{4}})}{\theta_2(q^{\frac{1}{4}})},$$

$$= \frac{q^{\frac{1}{24}}\,\vartheta(q^3)}{\sum q^{\frac{3}{2}(n+\frac{1}{6})^2}} = \frac{\sum (-1)^n q^{3(n+\frac{1}{3})^2}}{q^{\frac{1}{3}}\,\theta_2(q^{\frac{3}{2}})},$$

denen die entsprechenden Werte von χ_2 und χ_3 zur Seite treten.

101.

In enger Beziehung stehen ferner die von Jacobi und Hermite eingeführten Funktionen.

Jacobi gibt in seinen *Fundamentis*, S. 89, für die vierten Wurzeln der komplementären Moduln $\varkappa$ und $\varkappa'$ die Formeln

$$\sqrt[4]{\varkappa} = \frac{\chi_2}{\chi_3}\sqrt{2q^{\frac{1}{4}}}, \qquad \sqrt[4]{\varkappa'} = \frac{\chi}{\chi_3},$$

und fügt in seiner reichhaltigen, obschon dem Anscheine nach nicht ganz vollendeten Abhandlung im 37. Bande des *Crelle'schen Journals* — denn S. 254 wird noch eine Fortsetzung verhießen — *„Über unendliche Reihen, deren Exponenten zugleich in zwei verschiedenen quadratischen Formen enthalten sind"*, S. 76/77, die Reihenentwickelungen hinzu:

$$\sqrt[4]{\frac{1}{4}\varkappa} = \frac{\Sigma(-1)^n q^{6(n+\frac{1}{6})^2}}{\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)} q^{\frac{3}{2}(n+\frac{1}{6})^2}} = \frac{\Sigma q^{4(n+\frac{1}{4})^2}}{\Sigma q^{2(n+\frac{1}{4})^2}},$$

$$= \frac{\Sigma(-1)^n q^{2(n+\frac{1}{4})^2}}{\Sigma(-1)^n q^{2n^2}} = \frac{\Sigma q^{2(n+\frac{1}{4})^2}}{\Sigma q^{n^2}},$$

$$\sqrt[4]{\varkappa'} = \frac{\Sigma(-1)^n q^{\frac{3}{2}(n+\frac{1}{6})^2}}{\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)} q^{\frac{3}{2}(n+\frac{1}{6})^2}} = \frac{\Sigma(-1)^n q^{2(n+\frac{1}{4})^2}}{\Sigma q^{2(n+\frac{1}{4})^2}},$$

$$= \frac{\Sigma(-1)^n q^{n^2}}{\Sigma(-1)^n q^{2n^2}} = \frac{\Sigma(-1)^n q^{2n^2}}{\Sigma q^{n^2}}.$$

Hermite bezeichnet in seinen Arbeiten im 46. Bande der *Comptes rendus* (1858) diese Größen als Funktionen von $\mathfrak{h}$ durch

$$\sqrt[4]{\varkappa} = \varphi(\mathfrak{h}), \qquad \sqrt[4]{\varkappa'} = \psi(\mathfrak{h}),$$

und setzt ferner

$$\sqrt[12]{\varkappa\varkappa'} = \chi(\mathfrak{h}) = \frac{1}{\chi_3}\sqrt[6]{2q^{\frac{1}{4}}}.$$

Eine leichte Rechnung ergibt:

$$\chi(\mathfrak{h}) = 2^{\frac{1}{6}} \frac{\Sigma(-1)^n q^{3(n+\frac{1}{6})^2}}{\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)} q^{\frac{3}{2}(n+\frac{1}{6})^2}} = 2^{\frac{1}{6}} \frac{\Sigma(-1)^n q^{6(n+\frac{1}{6})^2}}{\Sigma q^{2(n+\frac{1}{4})^2}},$$

$$= 2^{\frac{1}{6}} \frac{\Sigma(-1)^n q^{\frac{3}{2}(n+\frac{1}{6})^2}}{\Sigma(-1)^n q^{2n^2}} = 2^{\frac{1}{6}} \frac{\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)} q^{\frac{3}{2}(n+\frac{1}{6})^2}}{\Sigma q^{n^2}}.$$

Die Einführung von $q' = e^{\mathfrak{h}'\pi i}$ an Stelle von $q = e^{\mathfrak{h}\pi i}$ ist zuerst von Hermite geleistet worden, und zwar gibt dieser in der *Théorie des fonctions modulaires* (1859) S. 4 und 15 für seine Funktionen φ, ψ und χ die folgenden Gleichungen:

$$1)\quad \varphi(\mathfrak{h}') = \varpi^{-\frac{1}{2}k'l'}\frac{\psi(\mathfrak{h})}{\varphi(\mathfrak{h})}, \qquad \chi(\mathfrak{h}') = \left(\frac{2}{l}\right)\varrho\varpi^{-\frac{3}{2}(kl+k'l')}\frac{\chi(\mathfrak{h})}{\varphi(\mathfrak{h})} \quad \text{(sic)},$$

$$2)\quad = \left(\frac{2}{k'}\right)\varpi^{-\frac{1}{2}k'l'}\psi(\mathfrak{h}), \qquad = \left(\frac{2}{lk'}\right)\varrho\varpi^{\frac{3}{2}(kl-k'l')}\chi(\mathfrak{h}),$$

$$3)\quad = \varpi^{\frac{1}{2}k'l'}\frac{\varphi(\mathfrak{h})}{\psi(\mathfrak{h})}, \qquad = \left(\frac{2}{k}\right)\varrho\varpi^{\frac{3}{2}(kl+k'l')}\frac{\chi(\mathfrak{h})}{\psi(\mathfrak{h})} \quad \text{(sic)},$$

$$4)\quad = \left(\frac{2}{l'}\right)\varpi^{\frac{1}{2}k'l'}\varphi(\mathfrak{h}), \qquad = \left(\frac{2}{kl'}\right)\varrho\varpi^{-\frac{3}{2}(kl-k'l')}\chi(\mathfrak{h}),$$

$$5)\quad = \left(\frac{2}{l'}\right)\varpi^{-\frac{1}{2}k'l'}\frac{1}{\varphi(\mathfrak{h})}, \qquad = -\left(\frac{2}{l'}\right)\varrho\varpi^{-\frac{3}{2}(kl+k'l')}\frac{\chi(\mathfrak{h})}{\varphi(\mathfrak{h})},$$

$$6)\quad = \left(\frac{2}{k'}\right)\varpi^{\frac{1}{2}k'l'}\frac{1}{\psi(\mathfrak{h})}, \qquad = -\left(\frac{2}{k'}\right)\varrho\varpi^{\frac{3}{2}(kl+k'l')}\frac{\chi(\mathfrak{h})}{\psi(\mathfrak{h})}.$$

Hier ist geschrieben

$$\varrho = e^{\frac{2m_1\pi i}{3}} = \psi^{2m_1},$$

$$m_1 = m + l(k+l') = m' + k(2l+k'),$$

$$m = kk'(1-l^2), \qquad m' = ll'(1-k^2),$$

$$\varphi(\mathfrak{h}) = \frac{\chi_1}{\chi_3}\sqrt{2q^{\frac{1}{4}}}, \qquad \chi = \frac{\psi(\mathfrak{h})}{\chi(\mathfrak{h})}\sqrt[6]{2q^{\frac{1}{4}}},$$

$$\psi(\mathfrak{h}) = \frac{\chi}{\chi_3}, \qquad \chi_2 = \frac{\varphi(\mathfrak{h})}{\chi(\mathfrak{h})}\sqrt[3]{\frac{1}{2q^{\frac{1}{4}}}},$$

$$\chi(\mathfrak{h}) = \frac{1}{\chi_3}\sqrt[6]{2q^{\frac{1}{4}}}, \qquad \chi_3 = \frac{1}{\chi(\mathfrak{h})}\sqrt[6]{2q^{\frac{1}{4}}}.$$

102.

Es ist von Interesse, die Resultate Hermite's mit den oben entwickelten Gleichungen

$$q^{-\frac{1}{24}}\chi = \pm\sqrt{\frac{\vartheta}{q^{\frac{1}{12}}\chi_1}}, \qquad \sqrt{2}\,q^{\frac{1}{12}}\chi_2 = \pm\sqrt{\frac{\vartheta_2}{q^{\frac{1}{12}}\chi_1}}, \qquad q^{-\frac{1}{24}}\chi_3 = \pm\sqrt{\frac{\vartheta_3}{q^{\frac{1}{12}}\chi_1}}$$

in Beziehung zu setzen. Wir schreiben der Abkürzung halber

$$\chi[q] = q^{-\frac{1}{24}}\chi, \qquad \chi_1[q] = q^{\frac{1}{12}}\chi_1, \qquad \chi_2[q] = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{12}}\chi_2, \qquad \chi_3[q] = q^{-\frac{1}{24}}\chi_3,$$

wodurch einfacher

$$\chi[q] = \pm\sqrt{\frac{\vartheta}{\chi_1[q]}}, \qquad \chi_2[q] = \pm\sqrt{\frac{\vartheta_2}{\chi_1[q]}}, \qquad \chi_3[q] = \pm\sqrt{\frac{\vartheta_3}{\chi_1[q]}},$$

und substituieren in diese Gleichungen die früher gefundenen Werte

$$\sqrt{\frac{p}{\pi}}\,\chi_1[q] = C\chi_1[q'], \quad \text{wo} \quad C_1 = \left(\frac{k}{l}\right)\psi^{-4m}\,\omega^{-\frac{1}{8}l(k+l')+l},$$

$$C_2 = \varepsilon\left(\frac{l}{k}\right)\psi^{-4m'}\,\omega^{\frac{1}{8}k(l-k')-(k-1)},$$

nebst

$$\begin{array}{lllllll} & 1) & 2) & 3) & 4) & 5) & 6) \\ \sqrt{\frac{p}{\pi}}\,\vartheta & = \alpha_1\vartheta_2(q') & = \alpha_1\vartheta_2(q') & = \gamma_2\vartheta_3(q') & = \gamma_2\vartheta(q') & = \gamma_{12}\vartheta(q') & = \gamma_{12}\vartheta_3(q'), \\ \sqrt{\frac{p}{\pi}}\,\vartheta_2 & = \beta_1\vartheta_3(q') & = \beta_1\vartheta(q') & = \alpha_2\vartheta_2(q') & = \alpha_2\vartheta_2(q') & = \beta_{12}\vartheta_3(q') & = \beta_{12}\vartheta(q'), \\ \sqrt{\frac{p}{\pi}}\,\vartheta_3 & = \gamma_1\vartheta(q') & = \gamma_1\vartheta_3(q') & = \beta_2\vartheta(q') & = \beta_2\vartheta_3(q') & = \alpha_{12}\vartheta_2(q') & = \alpha_{12}\vartheta_2(q'). \end{array}$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen

$$\chi\chi_2\chi_3 = 1 \qquad \text{und} \qquad \chi^8 + 16q\chi_2^8 = \chi_3^8,$$

oder

$$\chi[q]\chi_2[q]\chi_3[q] = \sqrt{2} \qquad \text{und} \qquad \chi^8[q] + \chi_2^8[q] = \chi_3^8[q],$$

erhält man bei geeigneter Bestimmung der Vorzeichen der Quadratwurzeln die den sechs Fällen entsprechenden Transformationsformeln:

1) $k(g)$.

$$\chi[q] = \left(\frac{2}{l}\right)\psi^{2m}\,\omega^{\frac{1}{6}l(k-2l')}\,\chi_2[q'],$$

$$\chi_2[q] = \psi^{2m}\,\omega^{-\frac{1}{6}l(2k-l')}\,\chi_3[q'],$$

$$\chi_3[q] = \left(\frac{2}{l}\right)\psi^{2m}\,\omega^{\frac{1}{6}l(k+l')}\,\chi[q'].$$

2) $k(g),\ l'(g),\ \varepsilon = \frac{1}{8}\, l'(l+k')$.

$$\chi[q] = \left(\frac{2}{l}\right)\psi^{2m}\,\omega^{\frac{1}{6}l(k-2l')}\,\chi_2[q'],$$

$$\chi_2[q] = (-1)^{\varepsilon}\left(\frac{2}{k'}\right)\psi^{2m}\,\omega^{-\frac{1}{6}l(2k-l')}\,\chi[q'],$$

$$\chi_3[q] = (-1)^{\varepsilon+\frac{1}{4}kl'}\,\psi^{2m}\,\omega^{\frac{1}{6}l(k+l')}\,\chi_3[q'].$$

3) $l(g)$.

$$\chi[q] = \psi^{2m'}\,\omega^{\frac{1}{6}k(2l+k')}\,\chi_3[q'],$$

$$\chi_2[q] = \left(\frac{2}{k}\right)\psi^{2m'}\,\omega^{-\frac{1}{6}k(l+2k')}\,\chi_2[q'],$$

$$\chi_3[q] = \left(\frac{2}{k}\right)\psi^{2m'}\,\omega^{-\frac{1}{6}k(l-k')}\,\chi[q'].$$

4) $l(g),\ k'(g),\ \varepsilon' = \frac{1}{8}\, k'(k-l')$.

$$\chi[q] = (-1)^{\varepsilon'}\left(\frac{2}{l'}\right)\psi^{2m'}\,\omega^{\frac{1}{6}k(2l+k')}\,\chi[q'],$$

$$\chi_2[q] = \left(\frac{2}{k}\right)\psi^{2m'}\,\omega^{-\frac{1}{6}k(l+2k')}\,\chi_2[q'],$$

$$\chi_3[q] = (-1)^{\varepsilon'+\frac{1}{4}lk'}\,\psi^{2m'}\,\omega^{-\frac{1}{6}k(l-k')}\,\chi_3[q'].$$

5) $k'(g)$.

$$\chi[q] = \psi^{2m}\,\omega^{\frac{1}{6}l(k+l')}\,\chi[q'] = \left(\frac{2}{k}\right)\psi^{2m'}\,\omega^{\frac{1}{6}k(2l+k')}\,\chi[q'],$$

$$\chi_2[q] = \psi^{2m}\,\omega^{-\frac{1}{6}l(2k-l')}\,\chi_3[q'] = \left(\frac{2}{k}\right)\psi^{2m'}\,\omega^{-\frac{1}{6}k(l-k')}\,\chi_3[q'].$$

$$\chi_3[q] = \psi^{2m}\,\omega^{\frac{1}{6}l(k-2l')}\,\chi_2[q'] = \psi^{2m'}\,\omega^{-\frac{1}{6}k(l+2k')}\,\chi_2[q'].$$

6) $l'(g)$.

$$\chi[q] = \left(\frac{2}{l}\right)\psi^{2m}\omega^{\frac{1}{6}l(k+l')}\chi_3[q'] = \psi^{2m'}\omega^{\frac{1}{6}k(2l+k')}\chi_3[q'],$$

$$\chi_1[q] = \left(\frac{2}{l}\right)\psi^{2m}\omega^{-\frac{1}{6}l(2k-l')}\chi[q'] = \psi^{2m'}\omega^{-\frac{1}{6}k(l-k')}\chi[q'],$$

$$\chi_3[q] = \psi^{2m}\omega^{\frac{1}{6}l(k-2l')}\chi_1[q'] = \psi^{2m'}\omega^{-\frac{1}{6}k(l+2k')}\chi_1[q'].$$

Durch Erhebung zu den achten Potenzen gehen die leicht zu verifizierenden Relationen hervor:

1) $\psi^{-l(2k-l')} = \psi^{l(k+l')} = -\psi^{l(k-2l')}$,

2) $\psi^{l(k+l')} = \psi^{l(k-2l')} = \psi^{-l(2k-l')}$,

3) $\psi^{k(2l+k')} = \psi^{-k(l-k')} = -\psi^{-k(l+2k')}$,

4) $\psi^{-k(l-k')} = \psi^{-k(l+2k')} = \psi^{k(2l+k')}$,

5) $\psi^{-l(2k-l')} = \psi^{l(k-2l')} = -\psi^{l(k+l')}$,

$\psi^{-k(l+2k')} = \psi^{-k(l-k')} = -\psi^{k(2l+k')}$,

6) $\psi^{l(k-2l')} = \psi^{l(k+l')} = -\psi^{-l(2k-l')}$,

$\psi^{-k(l+2k')} = \psi^{k(2l+k')} = -\psi^{-k(l-k')}$.

103.

Die Gleichungen für die Funktionen φ, ψ und χ ergeben sich nunmehr in folgender Form:

1) $$\varphi(\mathfrak{h}) = \left(\frac{2}{l}\right)\omega^{-\frac{1}{2}kl}\frac{1}{\psi(\mathfrak{h}')}, \qquad \psi(\mathfrak{h}) = -\omega^{-\frac{1}{2}ll'}\frac{\varphi(\mathfrak{h}')}{\psi(\mathfrak{h}')},$$

$$\chi(\mathfrak{h}) = \left(\frac{2}{l}\right)\psi^{-2m}\omega^{-\frac{1}{6}l(k+l')}\frac{\chi(\mathfrak{h}')}{\psi(\mathfrak{h}')};$$

2) $$\varphi(\mathfrak{h}) = \left(\frac{2}{l}\right)\omega^{-\frac{1}{2}kl}\psi(\mathfrak{h}'), \qquad \psi(\mathfrak{h}) = (-1)^{\varepsilon}\left(\frac{2}{k'}\right)\omega^{-\frac{1}{2}ll'}\varphi(\mathfrak{h}'),$$

$$\chi(\mathfrak{h}) = (-1)^{\varepsilon+\frac{1}{4}kl'}\psi^{-2m}\omega^{-\frac{1}{6}l(k+l')}\chi(\mathfrak{h}');$$

$$3)\quad \varphi(\mathfrak{h}) = \omega^{-\frac{1}{2}kk'} \frac{\varphi(\mathfrak{h}')}{\psi(\mathfrak{h}')}, \qquad \psi(\mathfrak{h}) = -\left(\frac{2}{k}\right) \omega^{\frac{1}{2}kl} \frac{1}{\psi(\mathfrak{h}')},$$

$$\chi(\mathfrak{h}) = \left(\frac{2}{k}\right) \psi^{-2m'} \omega^{\frac{1}{6}k(l-k')} \frac{\chi(\mathfrak{h}')}{\psi(\mathfrak{h}')};$$

$$4)\quad \varphi(\mathfrak{h}) = (-1)^{s'} \left(\frac{2}{l'}\right) \omega^{-\frac{1}{2}kk'} \varphi(\mathfrak{h}'), \qquad \psi(\mathfrak{h}) = \left(\frac{2}{k}\right) \omega^{\frac{1}{2}kl} \psi(\mathfrak{h}'),$$

$$\chi(\mathfrak{h}) = (-1)^{s' + \frac{1}{4}lk'} \psi^{-2m'} \omega^{\frac{1}{6}k(l-k')} \chi(\mathfrak{h});$$

$$5)\quad \varphi(\mathfrak{h}) = \omega^{-\frac{1}{2}l(k-l')} \frac{1}{\varphi(\mathfrak{h}')} = \left(\frac{2}{k}\right) \omega^{\frac{1}{2}kk'} \frac{1}{\varphi(\mathfrak{h}')},$$

$$\psi(\mathfrak{h}) = \omega^{\frac{1}{2}ll'} \frac{\psi(\mathfrak{h}')}{\varphi(\mathfrak{h}')} = \left(\frac{2}{k}\right) \omega^{\frac{1}{2}k(l+k')} \frac{\psi(\mathfrak{h}')}{\varphi(\mathfrak{h}')},$$

$$\chi(\mathfrak{h}) = \psi^{-2m} \omega^{-\frac{1}{6}l(k-2l')} \frac{\chi(\mathfrak{h}')}{\varphi(\mathfrak{h}')} = \psi^{-2m'} \omega^{\frac{1}{6}k(l+2k')} \frac{\chi(\mathfrak{h}')}{\varphi(\mathfrak{h}')}$$

$$6)\quad \varphi(\mathfrak{h}) = \left(\frac{2}{l}\right) \omega^{-\frac{1}{2}l(k-l')} \frac{\psi(\mathfrak{h}')}{\varphi(\mathfrak{h}')} = \omega^{\frac{1}{2}kk'} \frac{\psi(\mathfrak{h}')}{\varphi(\mathfrak{h}')},$$

$$\psi(\mathfrak{h}) = \left(\frac{2}{l}\right) \omega^{\frac{1}{2}ll'} \frac{1}{\varphi(\mathfrak{h}')} = \omega^{\frac{1}{2}k(l+k')} \frac{1}{\varphi(\mathfrak{h}')},$$

$$\chi(\mathfrak{h}) = \psi^{-2m} \omega^{-\frac{1}{6}l(k-2l')} \frac{\chi(\mathfrak{h}')}{\varphi(\mathfrak{h}')} = \psi^{-2m'} \omega^{\frac{1}{6}k(l+2k')} \frac{\chi(\mathfrak{h}')}{\varphi(\mathfrak{h}')}.$$

Auch ist es nicht schwer, die oben zitierten Hermite'schen Formeln damit in Einklang zu bringen, wenn man in den Fällen 1) und 3) den a. a. O. unter (V) und (VI) gegebenen Werten von $\chi(\mathfrak{h}') = \chi\left(\frac{c+d\omega}{a+b\omega}\right)$ das Minuszeichen beifügt, und von den in den einzelnen Fällen stattfindenden Relationen Gebrauch macht:

$$1)\quad \left(\frac{2}{l}\right) = \omega^{\frac{1}{2}(l^2-1)} = \omega^{\frac{1}{2}(kl-ll'-k'l')}, \qquad \left(\frac{2}{k}\right) = \omega^{\frac{1}{2}(kk'-ll'-k'l')}$$

$$l^2 \equiv k'^2 \equiv l'^2 \equiv 1, \qquad kl - ll' - k'l' \equiv kk' - ll' - k'l' \equiv 0 \mod 8,$$

mithin

$$\omega^{kl} = \omega^{kk'};$$

$$2)\qquad \left(\frac{2}{lk'}\right) = \omega^{kl'}, \qquad\qquad \omega^{(k-l')(l+k')} = \omega^{2(l+k')} = 1;$$

3) $\left(\frac{2}{k}\right) = \omega^{\frac{1}{2}(k^2-1)} = \omega^{\frac{1}{2}(kl+kk'-k'l')}, \qquad \left(\frac{2}{l'}\right) = \omega^{\frac{1}{2}(kk'-ll'-k'l')},$

mithin

$$\omega^{kl} = \omega^{-ll'};$$

4) $\left(\frac{2}{kl'}\right) = \omega^{lk'}, \qquad \omega^{(k-l')(l+k')} = \omega^{2(k-l')} = 1;$

5) $\left(\frac{2}{k}\right) \omega^{\frac{1}{2}(k^2-1)} = \omega^{\frac{1}{2}(kl+kk'-ll')}, \qquad \left(\frac{2}{l'}\right) = \omega^{\frac{1}{2}(kl-ll'-k'l')},$

mithin

$$\omega^{kk'} = \omega^{-k'l'};$$

6) $\left(\frac{2}{l}\right) = \omega^{\frac{1}{2}(l^2-1)} = \omega^{\frac{1}{2}(kl+kk'-ll')}, \qquad \left(\frac{2}{k'}\right) = \omega^{\frac{1}{2}(kl+kk'-k'l')},$

mithin

$$\omega^{ll'} = \omega^{k'l'}.$$

Zugleich erhält man als Ergänzung der a. a. O. von Hermite publizierten Formeln die Ausdrücke:

1) 2) $$\psi(\mathfrak{h}') = \left(\frac{2}{l}\right) \omega^{-\frac{1}{2}kl} \frac{1}{\varphi(\mathfrak{h})} = \left(\frac{2}{l}\right) \omega^{\frac{1}{2}kl} \varphi(\mathfrak{h}),$$

3) 4) $$= \left(\frac{2}{k}\right) \omega^{\frac{1}{2}kl} \frac{1}{\psi(\mathfrak{h})} = \left(\frac{2}{k}\right) \omega^{-\frac{1}{2}kl} \psi(\mathfrak{h}),$$

5) 6) $$= \omega^{-\frac{1}{2}kl} \frac{\psi(\mathfrak{h})}{\varphi(\mathfrak{h})} = \omega^{\frac{1}{2}kl} \frac{\varphi(\mathfrak{h})}{\psi(\mathfrak{h})}.$$

Herr Weber hat die betreffenden Transformationsgleichungen in einer anderen Form abgeleitet[1]) und die Übereinstimmung mit Hermite konstatiert. Man überzeugt sich aber leicht, daß die reziproken Werte seiner Gleichungen 10) und 11), in denen abweichend von Hermite

$$\varrho = \psi^{2k(l-k')+2ll'(k^2-1)} = \psi^{2k(l-k')-2m'} = \psi^{-2l(k+l')-2m}$$

gesetzt ist, für $k(g)$ resp. $l(g)$ auf die Formeln führen:

---

1) *Elliptische Funktionen* S. 87 und 107, wo

$$\mathfrak{h} = \omega, \quad \chi[q] = f_1(\omega), \quad \chi_2[q] = f_2(\omega) \quad \text{und} \quad \chi_3[q] = f(\omega)$$

geschrieben ist.

$$1)\qquad \chi(\mathfrak{h}') = -\left(\frac{2}{l}\right)\psi^{2m_1}\,\omega^{-\frac{3}{2}(kl+k'l')}\frac{\chi(\mathfrak{h})}{\varphi(\mathfrak{h})},$$

$$3)\qquad = -\left(\frac{2}{k}\right)\psi^{2m_1}\,\omega^{\frac{3}{2}(kl+k'l')}\frac{\chi(\mathfrak{h})}{\psi(\mathfrak{h})},$$

wodurch die erwähnte Korrektion gerechtfertigt wird. Auch kann man eine Bestätigung durch die Vertauschung von $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}'$ erhalten, wenn man k, l, k', l' durch $l', -l, -k', k$ ersetzt, wobei die Fälle 1) und 6) ineinander übergehen. Als Kuriosum mag noch die Bemerkung Platz finden, daß die zum Falle 2) gehörige identische Substitution

$$k=0, \quad l=1, \quad k'=-1, \quad l'=0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{h}=\mathfrak{h}'=i, \quad q=q'=e^{-\pi},$$

die Gleichung liefert:

$$\chi(q) = \sqrt{2q^{\frac{1}{4}}}\,\chi_2(q) \quad \text{oder} \quad \chi[q] = \chi_2[q].$$

104.

Wir wollen noch die Funktionen

$$\chi_1[q^{\frac{1}{2}}] = \chi_1[q]\chi[q] = \sum(-1)^n q^{\frac{3}{2}(n+\frac{1}{6})^2},$$

$$\chi_1[q^2] = \chi_1[q]\chi_2[q] = \sum(-1)^n q^{6(n+\frac{1}{6})^2},$$

$$\chi_1[iq^{\frac{1}{2}}] = \chi_1[q]\chi_2[q] = \sum(-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)} q^{\frac{3}{2}(n+\frac{1}{6})^2}$$

transformieren, und schreiben zur Abkürzung:

$$a_1 = \sqrt{\frac{\pi}{p}}\left(\frac{k}{l}\right)\omega^{-\frac{1}{6}l(k+l')+l}\,\psi^{-2m},$$

$$b_1 = \sqrt{\frac{\pi}{p}}\left(\frac{k}{l}\right)\omega^{-\frac{1}{6}l(4k+l')+l}\,\psi^{-2m},$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{\pi}{p}}\left(\frac{k}{l}\right)\omega^{-\frac{1}{6}l(k+4l')+l}\,\psi^{-2m},$$

$$a_2 = \sqrt{\frac{\pi}{p}}\,\varepsilon\left(\frac{l}{k}\right)\omega^{\frac{1}{6}k(4l-k')-(k-1)}\,\psi^{-2m'},$$

$$b_2 = \sqrt{\frac{\pi}{p}}\,\varepsilon\left(\frac{l}{k}\right)\omega^{\frac{1}{6}k(l-k')-(k-1)}\,\psi^{-2m'},$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{\pi}{p}}\,\varepsilon\left(\frac{l}{k}\right)\omega^{\frac{1}{6}k(l-4k')-(k-1)}\,\psi^{-2m'}.$$

Dann erhält man die Gleichungen

1) 2)

$$\chi_1[q^{\frac{1}{2}}] = (\tfrac{2}{l}) c_1 \chi_1[q'^2] = (\tfrac{2}{l}) c_1 \chi_1[q'^2],$$

$$\chi_1[q^2] = b_1 \chi_1[iq'^{\frac{1}{2}}] = (-1)^{\varepsilon} (\tfrac{2}{k'}) b_1 \chi_1[q'^{\frac{1}{2}}],$$

$$\chi_1[iq^{\frac{1}{2}}] = (\tfrac{2}{l}) a_1 \chi_1[q'^{\frac{1}{2}}] = (-1)^{\varepsilon + \frac{1}{4}kl'} a_1 \chi_1[iq'^{\frac{1}{2}}];$$

3) 4)

$$\chi_1[q^{\frac{1}{2}}] = a_2 \chi_1[iq'^{\frac{1}{2}}] = (-1)^{\varepsilon'} (\tfrac{2}{l'}) a_2 \chi_1[q'^{\frac{1}{2}}],$$

$$\chi_1[q^2] = (\tfrac{2}{k}) c_2 \chi_1[q'^2] = (\tfrac{2}{k}) c_2 \chi_1[q'^2],$$

$$\chi_1[iq^{\frac{1}{2}}] = (\tfrac{2}{k}) b_2 \chi_1[q'^{\frac{1}{2}}] = (-1)^{\varepsilon' + \frac{1}{4}lk'} b_2 \chi_1[iq'^{\frac{1}{2}}];$$

5)

$$\chi_1[q^{\frac{1}{2}}] = a_1 \chi_1[q'^{\frac{1}{2}}] = (\tfrac{2}{k}) a_2 \chi_1[q'^{\frac{1}{2}}],$$

$$\chi_1[q^2] = b_1 \chi_1[iq'^{\frac{1}{2}}] = (\tfrac{2}{k}) b_2 \chi_1[iq'^{\frac{1}{2}}],$$

$$\chi_1[iq^{\frac{1}{2}}] = c_1 \chi_1[q'^2] = c_2 \chi_1[q'^2];$$

6)

$$\chi_1[q^{\frac{1}{2}}] = (\tfrac{2}{l}) a_1 \chi_1[iq'^{\frac{1}{2}}] = a_2 \chi_1[iq'^{\frac{1}{2}}],$$

$$\chi_1[q^2] = (\tfrac{2}{l}) b_1 \chi_1[q'^{\frac{1}{2}}] = b_2 \chi_1[q'^{\frac{1}{2}}],$$

$$\chi_1[iq^{\frac{1}{2}}] = c_1 \chi_1[q'^2] = c_2 \chi_1[q'^2].$$

Ebenso leicht ergibt sich für $\vartheta_2 = 2q^{\frac{1}{4}}\theta_2$ die Transformation der Größen

$$\varphi(q) = q^{\frac{1}{8}} \theta_2(q^{\frac{1}{2}}), \quad \varphi_2(q) = \frac{1}{\sqrt{2}} \vartheta(q^2), \quad \varphi_3(q) = q^{\frac{1}{8}} \theta_2(iq^{\frac{1}{2}}),$$

oder

$$\varphi(q) = \sum q^{2\left(n+\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\chi_1[q]}{\chi[q]} = \frac{\vartheta}{\chi^3[q]},$$

$$\varphi_2(q) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum(-1)^n q^{2n^2} = \frac{\chi_1[q]}{\chi_2[q]} = \frac{\vartheta_2}{\chi_2^3[q]},$$

$$\varphi_3(q) = \sum(-1)^n q^{2\left(n+\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\chi_1[q]}{\chi_3[q]} = \frac{\vartheta_3}{\chi_3^3[q]}.$$

Schreibt man

$$a_1 = \sqrt{\frac{\pi}{p}}\left(\frac{k}{l}\right)\omega^{l-\frac{1}{2}l(k+l')}, \qquad a_2 = \sqrt{\frac{\pi}{p}}\,\varepsilon\left(\frac{l}{k}\right)\omega^{-\frac{1}{2}kk'-(k-1)},$$

$$b_1 = \sqrt{\frac{\pi}{p}}\left(\frac{k}{l}\right)\omega^{l-\frac{1}{2}ll'}, \qquad b_2 = \sqrt{\frac{\pi}{p}}\,\varepsilon\left(\frac{l}{k}\right)\omega^{\frac{1}{2}k(l-k')-(k-1)},$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{\pi}{p}}\left(\frac{k}{l}\right)\omega^{l-\frac{1}{2}kl}, \qquad c_2 = \sqrt{\frac{\pi}{p}}\,\varepsilon\left(\frac{l}{k}\right)\omega^{\frac{1}{2}kl-(k-1)},$$

so erhält man in den Fällen 1) resp. 2):

$$\varphi(q) = \left(\frac{2}{l}\right)c_1\,\varphi_2(q') = \left(\frac{2}{l}\right)c_1\,\varphi_2(q'),$$

$$\varphi_2(q) = b_1\,\varphi_3(q') = (-1)^\varepsilon\left(\frac{2}{k'}\right)b_1\,\varphi(q'),$$

$$\varphi_3(q) = \left(\frac{2}{l}\right)a_1\,\varphi(q') = (-1)^{\varepsilon+\frac{1}{4}kl'}a_1\,\varphi_3(q').$$

Man sieht, daß diese Gleichungen die nämliche Form haben, wie die im Vorstehenden abgeleiteten Ausdrücke, wenn man $\chi_1[q^{\frac{1}{2}}]$ durch $\varphi(q)$, $\chi_1[q^2]$ durch $\varphi_2[q]$ und $\chi_1[iq^{\frac{1}{2}}]$ durch $\varphi_3(q)$ ersetzt. Da die übrigen Fälle sich genau ebenso verhalten, so dürfen wir von dem Hinschreiben der betreffenden Formeln absehen.

105.

Wenn den Integralmoduln $\varkappa$ und $\varkappa'$ die Art. 94 eingeführten elliptischen Invarianten g_2 und g_3 entsprechen, und man schreibt für die absolute Invariante

$$\varpi = j^3, \quad \text{nebst der Diskriminante} \quad \Delta = \gamma_1^3 = 16\vartheta_1'^8,$$

so wird

$$j = \frac{g_2}{\gamma_1}, \qquad \gamma_1 = 16q^{\frac{2}{3}}\chi_1^8 = \left(\frac{2K}{\pi}\right)^4(2\varkappa\varkappa')^{\frac{4}{3}}.$$

In den *Leipziger Berichten* vom 31. Oktober 1889, S. 332 ist ferner gezeigt, daß die drei Wurzeln der kubischen Gleichung

$$4w^3 = 3jw + 1$$

durch

$$\gamma(q) = -\frac{\chi^8}{4q^{\frac{1}{3}}} = -\left(\frac{\varkappa'\varkappa'}{2\varkappa}\right)^{\frac{2}{3}}, \qquad \gamma_2(q) = -4q^{\frac{2}{3}}\chi_2^8 = -\left(\frac{\varkappa\varkappa}{2\varkappa'}\right)^{\frac{2}{3}},$$

nebst

$$\gamma_3(q) = \frac{\chi_3^8}{4q^{\frac{1}{3}}} = \left(\frac{1}{2\varkappa\varkappa'}\right)^{\frac{2}{3}}$$

dargestellt werden, während

$$\gamma_1^{\frac{1}{2}}\gamma = -\vartheta^4, \qquad \gamma_1^{\frac{1}{2}}\gamma_2 = -\vartheta_2^4, \qquad \gamma_1^{\frac{1}{2}}\gamma_3 = \vartheta_3^4.$$

Da die kubische Gleichung für $\Delta > 0$ eine positive Wurzel γ_3 und zwei negative $\gamma\ \gamma_2$ besitzt, so hat sich die Verteilung der letzteren nach dem Vorzeichen von

$$g_3 = \frac{4}{27}\gamma_1^{\frac{3}{2}}(\gamma_2 - \gamma_3)(\gamma_3 - \gamma)(\gamma - \gamma_2)$$

zu richten, welches mit dem von $\gamma_2 - \gamma$ übereinstimmen muß.

Fragt man jetzt, wie die Modulfunktionen $j\ \gamma_1\ \gamma\ \gamma_2\ \gamma_3$ linear transformiert werden, so findet man ohne Schwierigkeit:

$$\begin{aligned} \gamma_1(q) &= \left(\frac{\pi}{p}\right)^4 \psi^{-2l(k+l')-2m}\gamma_1(q'), \quad l(u), \\ &= \left(\frac{\pi}{p}\right)^4 \psi^{2k(l-k')-2m'}\gamma_1(q'), \quad k(u), \end{aligned}$$

mithin

$$\begin{aligned} j(q) &= \psi^{2l(k+l')+2m} j(q'), \quad l(u), \\ &= \psi^{-2k(l-k')+2m'} j(q'), \quad k(u), \end{aligned}$$

während für die Wurzeln $\gamma\ \gamma_2\ \gamma_3$ die Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned} \gamma(q) &= a_1\gamma_2(q') = a_1\gamma_2(q') = a_2\gamma_3(q') = a_2\gamma(q'), \\ \gamma_2(q) &= a_1\gamma_3(q') = a_1\gamma(q') = a_2\gamma_2(q') = a_2\gamma_2(q'), \\ \gamma_3(q) &= a_1\gamma(q') = a_1\gamma_3(q') = a_2\gamma(q') = a_2\gamma_3(q'), \end{aligned} \qquad \text{Fälle } 1)\ 2)\ 3)\ 4)$$

$$\begin{aligned} \gamma(q) &= b_1\gamma(q') = b_2\gamma(q') = c_1\gamma_3(q') = c_2\gamma_3(q'), \\ \gamma_2(q) &= b_1\gamma_3(q') = b_2\gamma_3(q') = c_1\gamma(q') = c_2\gamma(q'), \\ \gamma_3(q) &= b_1\gamma_2(q') = b_2\gamma_2(q') = c_1\gamma_2(q') = c_2\gamma_2(q'), \end{aligned} \qquad \text{Fälle } 5) \text{ und } 6)$$

nebst

$$a_1 = \psi^{l(k-2l')-2m}, \qquad a_2 = \psi^{-k(l+2k')-2m'},$$

$$b_1 = \psi^{l(k+l')-2m}, \qquad b_2 = \psi^{k(2l+k')-2m'},$$

$$c_1 = \psi^{-l(2k-l')-2m}, \qquad c_2 = \psi^{-k(l-k')-2m'}.$$

Für die Wurzeln der kubischen Resolvente

$$4\lambda^3 = g_2\lambda + g_3$$

endlich ergeben sich die einfachen Transformationsformeln:

$$\begin{array}{llllll} & 1) & 2) & 3) & 4) & 5) & 6) \\ (l'-l\mathfrak{h}')^2\,\lambda_1(q') = & \lambda_3, & \lambda_3, & \lambda_1, & \lambda_1, & \lambda_2, & \lambda_2\,, \\ (l'-l\mathfrak{h}')^2\,\lambda_2(q') = & \lambda_1, & \lambda_2, & \lambda_3, & \lambda_2, & \lambda_1, & \lambda_3\,, \\ (l'-l\mathfrak{h}')^2\,\lambda_3(q') = & \lambda_2, & \lambda_1, & \lambda_2, & \lambda_3, & \lambda_3, & \lambda_1\,, \end{array}$$

wo

$$\lambda_1 = \frac{1}{3}(\vartheta^4 + \vartheta_3^4)\,, \qquad \lambda_2 = \frac{1}{3}(\vartheta_2^4 - \vartheta^4)\,, \qquad \lambda_3 = -\frac{1}{3}(\vartheta_3^4 + \vartheta_2^4)\,.$$

Übrigens verlieren die hier entwickelten Gleichungen ihre Geltung, wenn man von anderen Werten der Invarianten g_2 und g_3 ausgeht, wie solche z. B. in den *Leipziger Berichten*, 1889, S. 93 oder S. 333 für den Übergang von q zu $q^{\frac{1}{2}}$, zu q^2 und zu $iq^{\frac{1}{2}}$ abgeleitet worden sind.

Inhaltsübersicht.

Kap. III. Anwendungen auf die Transformation elliptischer Differentiale.

Kap. IV. Über Gleichungen fünften und sechsten Grades.

Anhang, Abschnitt I.

Kap. V. Über Möbius' Kreisverwandtschaft und die Transformation durch reziproke Radien.

Anhang, Abschnitt II.

Kap. VI. Zur Theorie der Tschirnhaus-Transformation.

Anhang, Abschnitt III.

Kap. VII. Zur Auflösung der Ikosaedergleichung.

Anhang, Abschnitt IV.

Kap. VIII. Zur linearen Transformation der Thetafunktionen und elliptischen Modulfunktionen.

Druckfehler.

S. 33 Z. 9 v. o. statt (homogene) lies *symmetrische*.

S. 36 Z. 7 v. u. lies als p-te Polare.

S. 39 Z. 13 v. o. statt $\hat{\mathfrak{n}}\mathfrak{g}_2$ lies $\hat{\mathfrak{n}}_2\mathfrak{g}_r$.

S. 40 Z. 5 v. u. statt $f_2^{k=1}$ lies $f_2^{k=-2}$.

S. 125 Z. 9 v. o. statt S_i lies S_i.

S. 125 Z. 13 v. o. soll in der Mitte der Zeile stehen.

S. 130 Z. 12 v. u. lies daß die Gleichung für $\mathfrak{f}$.

S. 144 Z. 1 v. u. statt J'' lies $J_{,,}$.

S. 145 Z. 9 v. u. lies $J_{VI} = M =$.

Druckfehler und nachträgliche Bemerkungen zu S. 61 und 225.

S. 209 Z. 2 v. u. lies 1885, Bd. 6.

S. 225 Z. 13 v. o. statt $\sqrt{t}\,\sum(-1)^n$ lies $i\sqrt{t}\,\sum(-1)^n$.

S. 240 Z. 6 v. o. statt g_2^λ lies $g_2\lambda$.

S. 242 Z. 1 v. u. statt $x-\xi$ lies $x-\mathfrak{x}$.

S. 61 Z. 3 v. o. lese man zur Vereinfachung:

„werden, so folgt zugleich

$$(\lambda-\lambda')f=(P'x^2+2Q'x+R')^2-(Px^2+2Qx+R)^2,$$

und

$$(\lambda-\lambda')g=\lambda(P'x^2+2Q'x+R')^2-\lambda'(Px^2+2Qx+R)^2.$$

Mithin wird für $f=0$:

$$P'x^2+2Q'x+R'=\pm(Px^2+2Qx+R),$$

so wie für $g=0$:

$$(P'x^2+2Q'x+R')\sqrt{\lambda}=\pm(Px^2+2Qx+R)\sqrt{\lambda'}.$$

Diese quadratischen Gleichungen ergeben sogleich die Wurzeln von f und g, und zwar erhält man nach leichter Rechnung, wegen

$$2QQ'=PR'+P'R,$$

und wenn α, β *beliebige* Faktoren bedeuten, für $f=0$:

$$x=\frac{\pm\alpha(\lambda-\lambda')-\alpha(Q+Q')-\beta(R+R')}{\pm\beta(\lambda-\lambda')+\alpha(P+P')+\beta(Q+Q')}.$$

Mit Rücksicht auf die doppelten Vorzeichen von PQR oder $P'Q'R'$ sind dadurch die vier Wurzeln von f gegeben, während die Wurzeln von g den analogen Ausdruck liefern:

$$x=\frac{\pm\alpha(\lambda-\lambda')\sqrt{\lambda''}-\alpha(Q\sqrt{\lambda'}+Q'\sqrt{\lambda})-\beta(R\sqrt{\lambda'}+R'\sqrt{\lambda})}{\pm\beta(\lambda-\lambda')\sqrt{\lambda''}+\alpha(P\sqrt{\lambda'}+P'\sqrt{\lambda})+\beta(Q\sqrt{\lambda'}+Q'\sqrt{\lambda})}.$$

Selbstverständlich dürfen in diesen Formeln neben $\lambda\lambda'\lambda''$ die Radikale $PP'P''$, $QQ'Q''$, $RR'R''$ zyklisch vertauscht werden. Auch ist es nicht ohne Interesse, die Übereinstimmung mit der Art. 26 entwickelten Form von y' für $g(y')=0$ zu verifizieren.“

(Fortsetzung S. 62.)

S. 225 Z. 7 v. u. schalte man zur Erläuterung ein:

„Unter ausdrücklicher Voraussetzung der ungestörten Konvergenz beim Wachsen von m erhält man nicht allein

$$\sqrt{x}\sum_{-\infty}^{\infty}f(nx)=\sqrt{t}\lim\sum_{-m}^{m}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi t\, e^{nxti}\,dt$$

$$=\sqrt{t}\lim\int_{0}^{\infty}\varphi t\,\frac{\sin(m+\frac{1}{2})xt}{\sin\frac{1}{2}xt}\,dt=\sqrt{t}\sum\varphi(nt),$$

Weitere Druckfehler und Bemerkungen.

S. 13 Z. 10 v. u. statt $\frac{\varrho}{x}$ lies $\frac{\varrho}{\xi} = \vartheta_2$.

S. 17 Z. 17 v. o. statt Im Allgemeinen lies Allgemein wird.

S. 17 Z. 2 v. u. statt $\varrho^n f$ lies $\varrho^m f$.

S. 36 Z. 10 u. 11 v. u. unrichtige Klammern, lies $[(x-y)^p, f]_p$ usw.

S. 60 Z. 3 v. u. lies $f=0$, $g=0$ und $h=0$.

S. 98 Z. 12 v. u. statt S. 140/1 lies S. 540f.

S. 126 Z. 2 v. o. statt $15C^4)Ex$ lies $15C^4E)x$.

S. 136 Z. 1 v. o. lies eine lineare Gleichung.

S. 183 Z. 12 v. o. lies bezeichnen.

S. 186 Z. 2 v. o. lies $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^5$.

S. 200 Z. 7 v. o. statt $\dfrac{e^{(2n+1)\frac{\pi i}{5}}}{e^{(2n+1)^2\frac{\pi i}{5}}}$ lies $\dfrac{e^{(2n+1)\frac{\pi i}{5}}}{e^{(2n+1)\frac{2\pi i}{5}}}$.

S. 202 unten einzuschalten: Für $k+l'=0$ endlich gehen q und q' durch die lineare Substitution *ineinander* über.

S. 204 Z. 10 v. u. statt $q=e^{-\frac{\pi\sigma}{l}+\frac{k\pi i}{l}}$, $q'=e^{-\frac{\pi}{l\sigma}+\frac{l'\pi i}{l}}$,

lies $q=e^{-\frac{\pi\sigma}{l}-\frac{k\pi i}{l}}$, $q'=e^{-\frac{\pi}{l\sigma}+\frac{l'\pi i}{l}}$.

S. 219 Z. 6 v. o. fehlt:

mithin auch $$\sqrt{\frac{\pi}{p}}\, q^{\frac{1}{8}}\, \vartheta_1(\mathfrak{h}\pi, q^8) = C q'^{\frac{1}{8}}\, \vartheta_1(\mathfrak{h}'\pi, q'^8),$$

und $$\sqrt{\frac{\pi}{p}}\, \vartheta_1\left(\frac{\pi}{3}, q^{\frac{1}{8}}\right) = C\vartheta_1\left(\frac{\pi}{3}, q'^{\frac{1}{8}}\right),$$

S. 224 Z. 2 v. u. statt im Art. 10 lies im vorhergehenden Artikel.

S. 249 Z. 1 v. u. lies $\int\limits_{-\infty}^{\infty}$.

S. 250 Z. 4 v. u. statt $\frac{s^2}{r}$ lies $\frac{s^2}{2r}$.

Der Schluß des Art. 84 kann von S. 196 Z. 4 v. o. ab die folgende präzisere Fassung erhalten:

Es ist dann leicht, den zugehörigen Wert des Modularguments $q=e^{-\pi\frac{M}{M'}}$ zu berechnen, wo M und M' die beiden Gauß'schen arithmetisch-geometrischen Mittel zwischen den Größen

$$m \text{ und } n \qquad \text{resp.} \qquad m \text{ und } n'=\sqrt{m^2-n^2}$$

bezeichnen. Bedient man sich hierzu der schon S. 99 benutzten Hilfsgrößen

$$\mathfrak{l}=\lg\frac{m}{n}, \quad \mathfrak{l}_1=\lg\left(1+\frac{m}{n}\right)+\frac{1}{2}\mathfrak{l}-\lg 2=\lg\frac{m_1}{n_1},$$

$$\mathfrak{l}_2=\lg\left(1+\frac{m_1}{n_1}\right)+\frac{1}{2}\mathfrak{l}_1-\lg 2=\lg\frac{m_2}{n_2} \quad \text{usw.},$$

so erhält man

$$\lg q = 2\lg\frac{n'}{4m} + \mathfrak{l} - \tfrac{3}{2}(\mathfrak{l}_1 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{l}_2 + \tfrac{1}{4}\mathfrak{l}_3 + \tfrac{1}{8}\mathfrak{l}_4 \ldots),$$

$$\lg \vartheta_1'^4 = 2\lg\frac{n'}{m} + \mathfrak{l} - 3(\mathfrak{l}_1 + \mathfrak{l}_2 + \mathfrak{l}_3 \ldots).$$

Man kann dann mittelst Einführung der Werte

$$G = \varrho^2 g_2, \qquad H = \varrho^3 g_3, \qquad J = -\tfrac{16}{27}\varrho^6 \varDelta,$$

wo ϱ einen von q abhängigen Faktor bedeutet [1]), der Gleichung

$$\varpi(q) = \frac{G^3}{G^3 - 27H^2} = \frac{g_2^3}{\varDelta}$$

entsprechend, die Ausdrücke von g_2, g_3, $\varDelta$ und ϖ als Funktionen von q entwickeln.

Es bleibt nun das Verdienst Felix Klein's, auch die Wurzel der Ikosaedergleichung durch elliptische Modulfunktionen bestimmt zu haben. Und zwar ergibt sich der überraschend einfache Ausdruck

$$s = \frac{\vartheta_1(\frac{\pi}{5}, q^{\frac{1}{5}})}{\vartheta_1(\frac{2\pi}{5}, q^{\frac{1}{5}})},$$

oder nach der Bezeichnung des Herrn Klein, für $h = \pi\frac{M}{M'}$ und $ss' + 2\cos\frac{\pi}{5}(s+s') = 1$:

$$s' = q^{-\frac{3}{5}}\frac{\vartheta_1(hi, q^5)}{\vartheta_1(2hi, q^5)} \quad \text{nebst} \quad -\frac{1}{s'} = -q^{\frac{3}{5}}\frac{\vartheta_1(2hi, q^5)}{\vartheta_1(hi, q^5)}.\,^{2)}$$

(Folgt Art. 85.)

---

1) Ändert man ϱ um den Faktor $y\sqrt{20}$ und schreibt dazu:

$$G = 15(5y^2 - 10y + 1), \qquad G^3 = -180\varpi y^5,$$
$$H^2 = 60^3(1-\varpi)y^5, \qquad J = 15^3(4y)^5,$$

so erfüllen diese Werte die Gleichung der Ikosaederresolvente in der Form

$$(5y^2 - 10y + 1)^3 + 12^3\varpi y^5 = 0,$$

oder

$$5y + \frac{1}{y} = 10 - 12\sqrt[3]{\varpi y^2}.$$

Bemerkenswert erscheint die Entwicklung nach den Potenzen von q, wobei neben

$$z = s'^5(q) = s^5(q'),$$

$$s' = q^{\frac{2}{5}}\{1 - q^2 + q^4 - q^8 + q^{10} - q^{12} + q^{14} - q^{18} + 2q^{20} - 3q^{22} + 2q^{24}\ldots\},$$

hervorgeht:

$$y = r'^6(q) = r^6(q'), \qquad r' = \frac{i}{\sqrt{5}\,q^{\frac{1}{3}}}\{1 - q^2 - q^4 + 2q^{10} - q^{12} + 3q^{20} - 2q^{22} - 2q^{24}\}.$$

Für $k + l' = 0$ erhält man durch Vertauschung von q und q':

$$s = q'^{\frac{2}{5}}\{1 - q'^2 + q'^4 - q'^8 + q'^{10} - q'^{12} + q'^{14} - q'^{18} + 2q'^{20} - 3q'^{22} + 2q'^{24}\ldots\},$$

$$r = \frac{i}{\sqrt{5}\,q'^{\frac{1}{3}}}\{1 - q'^2 - q'^4 + 2q'^{10} - q'^{12} + 3q'^{20} - 2q'^{22} - 2q'^{24}\ldots\}.$$

Vielleicht lassen sich auch diese Entwicklungen als Quotienten einfacher Thetafunktionen darstellen, wie dies für s' durch Herrn Klein geschehen ist.

2) *Ikosaeder* S. 132 und *Mathem. Annalen* Bd. 61, S. 560.



